ПРИРОДА ВРЕМЕНА

информација материје

термодинамика
теорија релативности
квантна механика

принцип вероватноће у физици

РАСТКО ВУКОВИЋ

Растко Вуковић:
ПРИРОДА ВРЕМЕНА - информација материје

https://www.scribd.com/document/330148833/Priroda-vremena

Лектори:
Горан Дакић, српски, фебруар 2017.
Александра Радић, физика, март (у току) 2017.

Предговор

Први део су спекулације. Текст је разрада једне необичне и за неке читаоце спорне тезе књиге „Информација перцепције“. Та је књига промовисала моје ставове о васиони уопште, а ова у том смислу иде још даље, толико да је најрадије препоручујем тек као штиво из области научне фантастике, док прилике у науци не сазру. Због тога се формуле могу прескакати. Али математике има.

Од водећих људи науке и филозофије данас бисте могли добијати изјаве попут: „Време је највећа загонетка физике, можда толико тешка да је никада нећемо одгонетнути”. Па ви после тога реците: „Ја знам решење“! Понекад је заправо немогуће тек тако знати да је нешто истина и може ли то постати научном истином, а гледање са висине на неуспеле покушаје истраживача веома успешно обесхрабрује. Како без великих грешака нема великих продора, данас се научни радови пишу више као ретроспективе или у најнапреднијим случајевима са бојажљивим новим примедбама миц-по-миц. Затим мноштво чини своје, јер знање одавно „није ствар за класе већ за масе“. При томе оно ипак постаје ствар класа, али не оних са вишком оригиналности, проницљивости или уопште интелектуалне продорности. Наука израста у украс институција, научници постају борци за позиције и рејтинг, а зезање са истином у окружењу таквих је велики јерес. Зато пишем као да им се и не обраћам. Тако бар изгледа у првом делу текста под називом „Спекулације“.

Друга глава се бави простор-временом савремене физике, са освртом на претходне хипотезе. Трећа глава је она геометријска веза између макро и микро-света, са нагласком на делове који се ређе помињу у научној литератури. Четврта глава „Апстрактни простор“, заправо је алат квантне физике. У формализмима од друге до четврте главе, претходна филозофија је присутна само у траговима.

Ако је објективно и оно што остаје непромењено током промена, онда су закони природе такође физичка реалност. Супротно убеђењима Ернеста Маха, сматрам да је математика неодвојиви део физике до мере да претераност апстрактних геометријских дедукција постаје неизбежна. Са друге стране, видљиво детерминистичко понашање материјалног света око нас заправо је илузија којом закони великих бројева теорије вероватноће надвладавају непредвидљивост.

Једва приметна недоследност ознака делова текста долази из различитих периода мога рада на напуштеним темама, почев од раних осамдесетих година прошлог века до данас. Оне јесу скрпљене брже-боље, јер природне науке не стоје не марећи чак нити за „чињенице“ (чија зависност од теорије се увек потцењује), остављајући иза себе разне ауторитете звања и знања.

Растко Вуковић, октобар 2016.

Sadržaj

Glava 1

Спекулације

Ово је фантазија са елементима физике, а ја сам математичар. Десило се да немам машту Жила Верна нити израз Иве Андрића и пишем са дедукцијама и формулама које изгледају као да су нека права наука (а оне то још увек нису), као да желим да одустанете. Међутим то није, тако радим јер другачије не умем.

Дакле, инерција је до недавно била проста принципијелна ствар ни из чега изведена. Њутн је рекао да тело остаје у стању мировања или једноликог праволинијског кретања све док на њега не делује нека сила или друго тело, али нико не пита зашто је то тако. А када би се питало, питао сам се, хоће ли узрок бити баналан и очигледан да ће се генерације након открића чудити нашој и глупости оних пре? Или ће дешифровање закона инерције остати енигма кроз векове?

То су биле дилеме због којих сам кренуо од хаоса и случајности. Затим је прича отишла на два субјекта: принцип вероватноће и принцип ентропије. Први каже да се најчешће догађају највероватније ствари, а други да природа тежи најневероватнијим. Први је основа теорије вероватноће, други термодинамике. Оба у пару чине јин-јанг древног кинеског таоизма или модерне дијалектике. Управо због наизгледне контрадикторности мени су личили на нешто симпатично. Нарочито ме забављала чињеница да механику као најтврђе упориште фатализма „разваљујем“ неизвесношћу. Али, ма како да нешто смислим и организујем увек ту понешто крене по злу, па се тако и ова фикција отела и запловила као кладић низ воду.

Многе ствари у физици почеле су се потврђивати, али не све. Тамо где није било слагања „храбро“ сам експериментисао са дефиницијама (заправо забављајући се), почев од козметичког исправљања да *ентропија није мера хаоса већ слободе*, нити је она „логаритам вероватноће“, па до радикалног, да топлота (Q) код Клаузијуса није исто што и енталпија (H). А због тежине сукоба са званичном физиком, све сам онда окренуо на хипотезу. Када су јетко приметили једном познатом инжењеру-проналазачу да има на хиљаде неисправних патената, он им је одговорио вицкасто: нисам ја хиљадама пута погрешио, већ сам тада доказао да те ствари не раде. Коначно, те хипотезе сам паковао у препознатљив облик и ужем кругу читалаца.

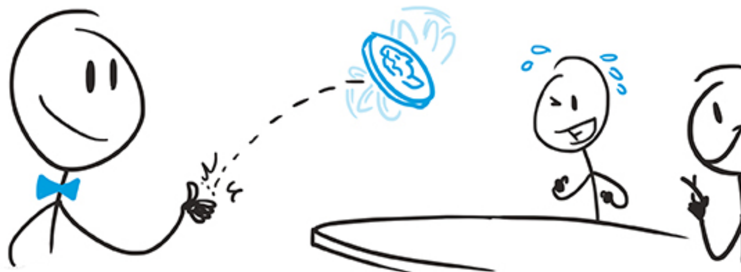
Хипотеза је предложено објашњење неког феномена. Да би хипотеза била научна она би се морала моћи тестирати и то како физичким експериментом, тако и њеним уклапањем у признате ставове. Са друге стране, хипотеза може бити и принципијелна поставка која по себи може изгледати несумњиво, али нам је ипак потребно тестирање њених последица, односно теза које из ње добијамо. Треће, хипотеза може бити и истина привремено проглашена неистином.

1.1 Вероватноћа

Оно што је највероватније догађа се најчешће. Укратко, то је *принцип вероватноће*. Математичка теорија вероватноће и њене примене овај принцип једноставно прихватају, не коментаришу га и не осврћу се на њега. Сматра се да није вредан критиковања нити анализирања - толико је очигледан и неспоран. Он ипак носи и дубља значења која вреди разматрати.

Пре свега то су питања у вези са објективношћу *случајности*. Да бисмо могли говорити о вероватноћи морамо имати опције. У датој ситуацији чији исход је за нас непредвидив требамо имати бар две (наизглед) могуће реализације. Затим, ако је наш доживљај различитости исхода *субјективан*, резултат је нашег непознавања важних околности, онда можемо говорити само о псеудо (кобојаги) вероватноћи, али не и о *објективној*. Тада је могуће разликовати праву од лажне случајности, према начину њиховог понашања у математичким тзв. тестовима случајних догађаја.

Псеудо случајне бројеве чини низ цифара броја $\pi = 3,14159265359\dots$ који ће положити поменуте тестове случајности, осим што ћемо у другом читању тог броја видети да су му цифре опет исте. Али особа која покушава симулирати случајности набрајањем насумичних цифара из главе тешко би могла проћи исте тестове.



Slika 1.1: Бацање новчића.

Када бацамо *фер-новчић* (слика 1.1) случајни исходи су „Писмо“ и „Глава“ са шансама пола-пола. У низу од 100 поновљених бацања око 50 исхода ће бити „Писмо“, односно „Глава“. Међутим, њих ће ретко бити тачно по 50. Наиме, бацања су независни догађаји, у смислу да следеће не памти она претходна, те се могу дешавати дуге серије узастопних истих исхода и зато је резултат само приближно пола-пола.

Тестови случајности предвиђају ову толеранцију. Штавише, они предвиђају не само средњу вредност (50) већ и средње одступање од те вредности (5), од падања „Писма“ у низу (100) бацања фер новчића. У случају нефер новчића или у случају да исходе бацања покушава нагађати човек лако се може десити да ова средња одступања не буду тачна и да се не прође тест. Међутим, поменуте цифре броја π, извлачене редом као из лото бубња, показаће се савршено „случајне“.

Насупрот субјективној стоји објективна случајност која је још увек предмет научних расправа и спекулација. Још увек наука није сигурна да ли је исход падања (фер) новчића заиста случајан тако да не постоји такав скуп околности на основу којег би било могуће (тачно) предвидети да ли ће пасти Писмо или Глава. Насупрот томе, ми таквих сумњи немамо. Овде инсистирамо на егзистенцији у природи управо објективне случајности. Подразумева се да објективна случајност задовољава поменуте тестове случајности.

Екстремни облик објективне случајности било би тврђење да „нема начина да се

нешто организује тако да се обухвате и контролишу све могуће последице и да се искључи свака непредвиђеност". Или: „Нема гаранције за апсолутну извесност приликом практичне провере било којег од природних закона". То је на корак од *Геделове теореме* о немогућности: „Ма како да имамо велик скуп аксиома и њихових последица, увек ће бити тачних твђења која се не могу извести из датог скупа".

Са становишта теоријске физике, јако упориште вере у објективну случајност је Белова теорема[1] из 1964. године. Она утврђује да нема скривених параметара у квантној механици који би могли стајати иза „фантомског деловања на даљину" које су открили Ајнштајн, Подолски и Розен 1935. године, а које је данас познато као *квантна спрегнутост*. Међутим, та теорема доказује и да не постоји неко или нешто (људи сигурно не) што би могло предвидети случајне догађаје микро-света.

Иначе, једина алатка за проучавање квантне механике коју данас имамо (осим експеримената са углавном веома великим и скупим уређајима) је алгебра вектора вероватноћа. Вероватноћа је пре свега однос реализованих и свих исхода. На пример, то је број $1:2=0,5$ за исход „пало је Писмо" код бацања новчића, или $1:6\approx 0,16667$ за исход „пала је Шестица" код бацања коцке. Вероватноћа је реалан број између нуле и један, при чему 0 значи немогућ а 1 сигуран (известан) догађај. Понављање случајних опита у експерименту, када је то могуће, увек потврђује очекивања математичке теорије вероватноће.

Експериментална физика случајне догађаје може посматрати само на неком ограниченом простору. Када је то простор дате дужине, ширине и висине који можемо мерити и представљати апсцисом, ординатом и апликатом, редом осама x, y и z са заједничким исходиштем O, тада кажемо да имамо Декартов правоугли систем координата $Oxyz$. Ако највећа дужина дуж осе x износи d, онда бројеви $x:d$ могу представљати вероватноће придружене апсциси, јер је сваки између нуле и један. Слично је и са осталим осама. Аналогно радимо и са осталим интерпретацијама координата у физици. Ипак, то нису једини начини придруживања вероватноћа.

Слободну честицу, на коју не делују вањске силе, можемо описивати помоћу њеног тренутног положаја који се мења и импулса (количине кретања) који се не мења. Оба су вектори, редом $\mathbf{q}=(x,y,z)$ и $\mathbf{p}=(p_x,p_y,p_z)$. Њен тренутни положај као и импулс на датом месту у простору не можемо измерити сасвим тачно, а те неодређености (границе прецизности мерења) углавном нису пропорционалне са координатама, па је згодније посматрати интервал, рецимо од апсцисе x до $x+\Delta x$, где је Δx неодређеност положаја честице на датом месту у датом тренутку. Слично дефинишемо неодређености других координата, као и неодређености импулса. Када те неодређености можемо поставити у максимални оквир, у неко ограничење слично претходном примеру, онда им слично претходном примеру можемо придружити и вероватноће. Тада кажемо да смо те неодређености нормирали (на јединицу).

Свака особина честице, која се може мерити попут положаја (брзине, енергије, амплитуде), може се на сличан начин баждарити вероватноћом. Међутим, шта ако честица има положај али такав који никада није апсолутно тачан? Ако честица нема апсолутно тачан положај у смислу да би покушај дефинисања таквог морао довести до контрадикције, онда се њен положај не би могао описивати реалним бројевима. Зато квантна механика особине честица описује комплексним бројевима. Таква је таласна функција $\psi=\psi(x,y,z,t)$ која за различите реалне бројеве $x,y,z,t\in\mathbb{R}$ који представљају положај и тренутак, може узимати различите вредности у скупу комплексних бројева,

[1] в. [17]

$\psi \in \mathbb{C}$, при чему је квадрат интензитета тог комплексног броја, производ коњуговано комплексних бројева $|\psi|^2 = \psi^* \psi \in \mathbb{R}$, реалан број и према томе мерљив.

Подвуцимо да стања система квантне механике која морамо описивати комплексним бројевима не само да нам нису у потпуности доступна већ она у реалности и не постоје у потпуности. Затим коментаришимо Борново правило[2] из 1926. године, које каже да се сва квантна стања изражавају поменутим функцијама ψ чије су вероватноће квадрати интензитета те функције. Другим речима, ако стање квантног система можемо на датом месту у датом тренутку представити помоћу комплексног броја ψ, онда је $|\psi|^2$ вероватноћа да тај систем има ту особину.

Тек када микро-простор физике поставимо на тај начин, као (алгебарски) простор случајних догађаја, тек тада ствари крену. Они тада крену толико логично и убедљиво да се данас управо квантна механика сматра најтачније провереном теоријом физике уопште. Замислите, а она је тек недавно настала. То је по себи такође важан аргумент за веру у случајност и то не само субјективну.

Окренимо се сада на другу страну ка макро-свету и приметимо да нам свакоднавница често каже да се на егзактна предвиђања будућности не можемо ослањати. Вагајући аргументе за-и-против апсолутне предодређености пре или касније морамо доћи до најтврђих упоришта детерминизма у науци уопште, а то су класична Њутнова механика и Ајнштајнова релативност. Оне су пресудан разлог због којег сам у књизи [1] оживео Урисонову дефиницију димензије.

Према Урисоновој дефиницији димензије[3] број димензија тачке и коначног скупа тачака је нула ($n = 0$). Скуп тачака је димензије $n+1$ ако и само ако се може раздвојити неким његовим подскупом бар димензије $n = 0, 1, 2, \dots$. Ако такво раздвајање није могуће, дати скуп је димензије $n + 2$ или веће.

На пример, права линија се у једној тачки може пресећи на два дела (две полуправе) и то је фигура[4] најмање димензије која може извршити такву поделу. Према томе, права има димензију један, јер тачка има димензију нула. Раван се може преполовити (најмање) једном правом (на две полуравни), јер раван има димензију два. Простор (дужина, ширина и висина) има димензију три, јер се може поделити једном равни а не може фигуром са мање од две димензије. Када би *простор-време* имало „само“ четири димензије (три просторне и једну временску), као што је то у случају Минковског[5] модела рађеном за потребе теорије релативности, тада би садашњост која садржи сав (3-димензионални) простор Васионе у тренутку „сада“ могла поделити Васиону на њену прошлост и будућност. Такво нешто је могуће само у инерцијалним системима.

Да се у инерцијалном систему могу синхронизовати сатови показао је Ајнштајн већ у свом раду из 1905. године[6]. Синхронизација сатова значи такво успостављање времена на датом простору које ће се мењати мало-по-мало, кажемо и непрекидно или континуално, са непрекидном променом положаја. Добијени издвојени континум простор-времена је садашњост датог простора. Он је „сада“ тог простора, „залеђени“ тродимензионални исечак простор-времена. Доследно даље, из чињенице да се сатови у инерцијалним системима могу синхронизовати и Урисонове дефиниције димензије, следи да се садашњост тих система налази у четири димензионалном простор-времену. То „сада“ се пружа дуж нове координате - трајања.

---

[2] Born rule: `https://en.wikipedia.org/wiki/Born_rule`

[3] Урисонова дефиниција је мало другачија, тополошка али опет индуктивна.

[4] У геометрији фигуром називамо било какав непразан скуп тачака.

[5] Hermann Minkowski (1864-1909), математичар немачко-јеврејског порекла.

[6] Albert Einstein (1905) Žur Elektrodynamik bewegter Körper", Annalen der Physik 17: 891;

Инерцијални системи су они системи координата који су везани за (мирују у односу на) тела у једноликом праволинијском кретању. То су тела у *инерцијалном кретању* на која, можемо сматрати да, не делују делују вањске силе и која због тога не осећају убрзања. Зато можемо рећи да је (приближно) инерцијалан систем и онај везан за тело које слободно пада у (слабом) гравитационом пољу. То је само „приближно инерцијалан систем", јер гравитација привлачећи тело по једној оси стишће га бочно. Гравитација масивних звезда издужује тело усисавајући га, тако да се оно у слободном паду ка њој више не може третирати као да је у инерцијалном систему, бар не у смислу да то тело не осећа вањске силе.

Дакле инерцијални системи простор-времена имају четири димензије. Када би постојао само један инерцијални систем онда би Васионом владао детерминизам. Сви догађаји били би предодређени, јер би постојао само један правац промена. Постојала би само једна временска оса којом би се развијала садашњост, а то „сада" би опет у сваком тренутку делило нашу прошлост од наше будућности. Васиони којом би владао детерминизам не би требао принцип вероватноће. Он би био илузоран, привремен или бесмислен. Међутим, у свету у којем смо постоје и неинерцијални системи, а такве је немогуће ставити у само четири димензије.

На пример, у систему који ротира није могућа синхронизација сатова. Док Декартов систем координата $Oxyz$ ротира око z-осе, све даље тачке од те осе се крећу све брже, свака по својој кружници ротације, са све споријим током времена (релативно у односу на непокретне тачке z-осе). Када синхронизујемо сатове идући у једном смеру ротације дате кружнице, десиће нам се велики скок времена након обиласка целе кружнице и доласка на почетак. Тај ће скок бити већи са већим полупречником кружнице, али и са већом угаоном брзином ротације система. Та иначе позната немогућност синхронизације сатова сада указује на немогућност дефинисања 3-дим[7] садашњости за одвајање свих будућих од свих прошлих догађаја датог посматрача. Другим речима, према Урисоновој дефиницији димензије, систем који ротира не може стати у простор-време са четири димензије.

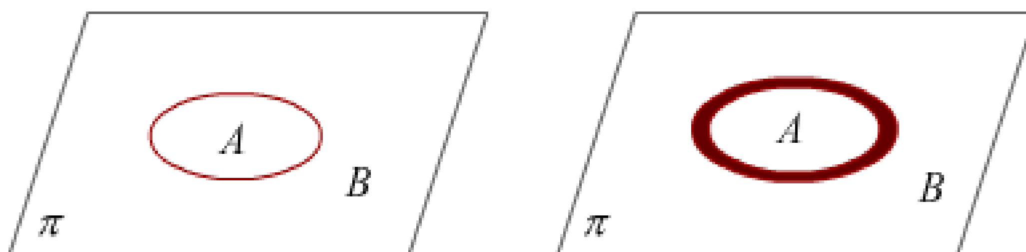
Такође, нити инерцијални системи који би се кретали различитим релативним брзинама (сваки у једнолико праволинијском кретању) и који би због тога имали различиту брзину временског тока, не би могли стати у четири димензије простор-времена, али то није тако очигледно као у примеру ротације. Исто је мало јасније у примеру централно симетричне гравитације, какву ствара планета или звезда. Радијално привлачење ка центру гравитације (планете), које расте са приближавањем центру, ствара све већи отклон временске осе од вертикале (која се поклапа са вертикалом само у одсуству гравитације и кретања). Отклони временских оса различити су у различитим тачкама око центра а сви су усмерени ка центру те их није могуће распоредити без (најмање) три димензије времена.

Узгред приметимо да додатне димензије времена о којима овде причамо нису оне додатне димензије простора са којима ради теорија струна[8]. Друго, рећи да можемо (морамо) дефинисати додатне димензије времена још увек не значи да те димензије имају јаке везе са свакодневном неизвесношћу. То објашњава следећи пример који повезује случајност, ерозију и додатне Урисонове димензије. Напомињем да ерозије као последице случајности могу дивергирати (Лоренцов „ефекат лептира" теорије хаоса) и конвергирати (ка стабилном стању), али да су просечно деструктивне.

[7]Пишемо кратко „3-дим" уместо „тродимензионалан".
[8]String Theory: `http://superstringtheory.com/`

Замислимо да је део простор-времена ограђен зидовима који потпуно одвајају унутрашњост (тог затвора) од спољашњости. Цигле, камен или други употребљени грађевински материјал има три димензије простора и такође трајање, што значи да има бар четири димензије. Претпоставимо да ови зидови неће бесконачно трајати, него да ће због ерозије пре или касније попустити. Те четири димензије тада не раздвајају простор-време, што значи да оно има више од пет димензија.

Претпоставимо ли обрнуто, да поменути зидови хоће бесконачно трајати, да ће остати непромењени због одсуства ерозије или других фактора деструкције, онда опет према Урисоновој дефиницији простор-време не мора имати више од четири димензије, колико имају зидова затвора. Дакле, ерозија као низ насумичних дешавања које руше структуру материјала захтева више од четири димензије простор-времена.



Slika 1.2: Затворена кружна линија и прстен у равни π.

На слици 1.2 видимо нешто аналогно у 2-дим равни π. Лево је затворена кружна линија (димензије један) која потпуно одваја област A од области B те равни, а десно је прстен (димензије два) који чини исто раздвајање. Међутим, линија лево је фигура (нај) мање димензије која може одвојити област A од B равни π. Прстену десно одговарају 4-дим зидови затвора који, у случају да не трају довољно, указују на постојање више од пет димензија простор-времена.

Три димензије времена, заједно са три димензије простора, нису само последица, већ су и претпоставка егзистенције објективне случајности. Као што смо видели, оне су у извесном смислу и последица принципа вероватноће. Пошто о њима сазнајемо помоћу математичке дедукције, оно што називамо Васионом морамо сагледавати са једне стране помоћу непредвидљивости, рецимо материјалног дела света, а са друге стране помоћу закона логике којима се подвргава све остало. Васиона је само онај део Универзума о којем ми овде желимо имати неку представу.

Природним наукама често називамо оне који се баве неживом супстанцом. Са становишта синтезе живог и неживог коју ова са мојом претходном књигом[9] промовише, исправније је *природне науке* називати експерименталним, оним наукама које потврду својих закона траже манипулацијама са материјом. Тако речене природне науке се баве случајним догађајима и зато су њихове истине увек приближне.

За разлику од природних, закони логике су дефинитивни. Доказ Питагорине теореме је и данас, пар хиљада година након открића, једнако убедљив, а тако је и са свим осталим теоремама. Зато присуство математике физици даје такав значај да неки кажу, физика је тачна онолико колико има математике у њој. Са друге стране, одстрањујући математичку дедукцију неће остати ништа од физике, јер она није нешто независно, самоодрживо на начин како је то веровао Ернест Мах.

[9] в. [1]

1.2 Васиона

Васиона, свемир, космос или универзум су грубо гледано синоними за „бесконачно“ пространство простора и времена које нас окружује. Оно обухвата разна небеска тела (слика 1.3) попут галаксија, звезда, планета, сателита, комета, поред простора и времена у којем се та тела налазе. Видљива васиона има пречник око 93 милијарде *светлосних година* (дужина које светлост пређе за годину дана), а сматра се да је настала „великом експлозијом“ (енг. *Big Bang*) пре око 13,8 милијарди година.

Slika 1.3: Васиона.

Наша васиона је скуп случајних догађаја. Са значењем уобичајеним у математици, кажемо да је физичики свет у коме живимо подручје случајних исхода материје, простора и времена. Логику и принцип вероватноће подразумевамо.

Васиона о којој је овде реч много је већа од оне из уџбеника, али је она ипак ограничена. Њена ограничења не долазе само из коначности свега физичког, већ и из коначног домета сваке области математике, укључујући и вероватноћу. Неке од граница ћемо покушати разумети из следећих пет примера, а о осталима можемо нагађати.

i. Исказ „ја лажем“ је контрадикција. Ако сам ја лажов, онда лажем да лажем, па ја говорим истину; ако ја говорим истину онда је истина да лажем, па ја лажем.

ii. Не постоји село са „брицом који брије све оне који се не брију сами“. Поменути брицо би могао да брије неке друге мештане, али шта је са њим лично? Ако се не брије сам, сам ће се бријати, а ако се брије сам онда он себе не може бријати.

iii. Бог не може бити тако свемогућ да „може створити толико тежак камен да га ни он лично не може подићи“.

iv. Ако за свако својство постоји скуп свих објеката који задовољавају то својство онда то исто важи и за својство „скуп не припада самом себи“. То је верзија тзв. *Раселовог парадокса*, која је утолико тежа јер је ово својство врло природно, тешко је наћи скуп који припада сам себи.

Ако је X скуп са датим својством, онда X припада себи, па не спада у ову врсту. Обрнуто, ако X не припада себи онда спада у ту врсту да припада себи. У оба случаја имамо контрадикцију. А већ због овог случаја није могућ „скуп свих скупова“.

v. *Ришаров парадокс.* Посматрајмо скуп природних бројева $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ и у вези са њим све могуће просте исказе, које ћемо поредати у низ, дакле кодирати редним

бројевима: 1. број је паран; 2. број није паран; 3. број је три; 4. број је квадрат простог броја; 5. број је дељив са седам; ... . Приметимо да својствима 3. и 4. одговара редни број под којим су кодирана, а 1, 2. и 5. не одговара.

Затим уведимо дефиницију: Број је Ришаров ако нема својство које кодира. Бројеви 3 и 4 су Ришарови, бројеви 1, 2 и 5 нису. Особина „број је Ришаров“ је такође проста особина скупа природних бројева, па ће се и она наћи у датом низу под неким бројем, рецимо под бројем n. Међутим, ако је број n Ришаров, онда он нема својство које кодира, па није под редним бројем n. Обрнуто, ако број n није Ришаров, онда он има својство које кодира, што значи да је под редним бројем n. Контрадикција је у сваком од случајева.

Из ове врсте контрадикција (i-v) може се извести и претходно поменута Геделова теорема о немогућности (постоје границе важења датих истина, а иза њих увек има и других истина), те на основу ње да сваки принцип, па и принцип вероватноће, има своје подручје важења. Зато принцип вероватноће, односно математичку теорију вероватноће, ограничавамо на Васиону коју због истог морамо и допунити. Допуна се пре свега односи на поменутих шест димензија, три просторне и три временске, за сада.

Из претходних навода можемо извести и закључак да је Васиона део нечег већег о чему овде нити имамо појма нити ћемо о томе расправљати. Рецимо само да она обухвата све оно што произилази из принципа вероватноће и односи се на супстанцу, али можда не и све оно до чега би могле доћи неке теорије вероватноће и дедукција уопште. Оно што имамо је материја у нереду са законима логике, па се поставља питање: како то да нам се насумични свет представља на прилично уређен начин?

То је прво питање. Одговор даје закон великих бројева теорије вероватноће. Када бацамо (фер) новчић, на случајан начин падају Писмо или Глава. У мањим серијама, од само неколико узастопних бацања, може се десити да сваки пут падне само једна од две могућности али и да падну пола-пола, свака од њих једнак број пута. Свако следеће бацање је независтан догађај, оно не памти претходне исходе и демонстрација је праве случајности. Међутим, у све дужим серијама се број падања Писма у односу на број свих бацања групише око броја $\frac{1}{2}$ који називамо вероватноћа падања Писма. У веома дугим серијама тај однос губи одлике случајности, а сам прелазак сучајности у неслучајност описује *закон великих бројева* математичке теорије вероватноће. Закон великих бројева говори о све већој извесности односа броја исхода и броја бацања у све већем броју понављања.

Са друге стране гледано, помоћу закона великих бројева се може проценити да су на почетку скале случајности елементарне честице квантне механике односно њихове особине. Наша је свакодневница негде на средини те скале, а хоризонт догађаја је на другом крају. Израз *хоризонт догађаја* је настао у теорији релативности као уопштени назив за границу у простор-времену, дефинисану у односи на посматрача, иза које догађаји не могу да утичу на посматрача. То је сфера око црне рупе на чијој површини време стоји а дужине ка центру постају нулте. *Црна рупа* је материја која је под притиском (сопствене гравитације) толико здробљена да су сви елементи атома стиснути у једну масу. Хоризонт догађаја је и граница видљивог свемира.

Након постулирања неминовности случајности, следећи по реду важности овде нам је ток времена. У таквој Васиони, једноставно речено, време је неизвесност претворена у информацију. О томе више мало касније, а за сада само приметимо да претварање неизвесности може бити релативно. У односу на посматрача који мирује у инерцијалном систему (рецимо сопственог посматрача кабине која слободно пада) молекуле гаса у

његовој соби се распоређују једнолико. То је у складу са законима вероватноће. За релативног посматрача (који мирује негде у гравитационом пољу), кретање молекула гаса поменуте собе, као и саме собе (у слободном паду), је чудно. Као да није у складу са законима вероватноће, јер све молекуле гаса заједно путују сличним путањама (следећи путању кабине која слободно пада). Оне се тако крећу због дејства гравитације - рећи ће релативни посматрач. То није довољно добар одговор - одговорићемо - јер смо пре свега постулирали случајност. Једнако тачан, али овде прихватљивији, био би одговор да је поремећај вероватноће узрок (доживљаја) гравитационог поља.

Оно што желим подвући још је јасније у обрнутом примеру. Нека је сопствени посматрач у соби која мирује у гравитационом пољу, а релативни нека га посматра из инерцијалног система. Знамо да се молекуле гаса у гравитационом пољу не распоређују баш сасвим подједнако по соби, већ се помало гомилају ка дну. Уобичајено је рећи да гравитација вуче молекуле ка поду и ремети вероватноћу. Међутим, формално гледајући, нема контрадикције када тврдимо да је у датом пољу прво присутан поремећај вероватноће а тек као последица да долазе ефекти гравитације.

Тако долазимо до проширеног појма релативности (у односу на Ајнштајнову), прво због становишта релативног посматрача који је у слободном паду и не мора да примети гравитационо поље, нити поремећаје вероватноће, а затим и због релативности саме вероватноће.

Након постулирања неминовности случајности и наглашавања значаја тока времена, морамо приметити да места нестанка овакве Васионе морају бити и места где време престаје постојати. Такође, Васиона мора да има и друге токове времена који можда конвергирају (стапају се у једну линију развоја) тамо где значајно делује поменути закон великих бројева, али не и на нивоу микро-света. Од нивоа микро-света па бар до наше свакодневнице, морају да постоје видљиве опције. Питање је колико те могућности и избори могу производити далеких излета ван наше временске осе, посебно, да ли су они већи од оних микроскопских предвиђених теоријом струна?

У складу са теоријом струна овде долазимо до једног парадокса времена: ако додатне димензије времена постоје како то да их не видимо, а ако оне не постоје како то да постоји случајност? Теорија струна сличан парадокс (димензија простора) решава тако што додатне димензије минимизира. Ми их не видимо јер се толико мало одвајају од нама видљивих димензија, да нам постају невидљиве попут структуре танке длаке. Примењено на време, тиме се минимизира и случајност, а то је овде неприхватљиво. Зато нудим алтернативно објашњење.

Пре тога једно појашњење. Ако су девијације (дисперзије) око просечних средњих очекивања (вероватноће) занемарљиво мале, онда не важи она претходна расправа о ерозији и не можемо доказати егзистенцију више од четири димензије простор-времена; бар не на наведени начин. Случајност би тада била скоро небитна и губиле би на значају расправе о последицама принципа вероватноће. Слично је и ако те девијације увек конвергирају назад (као у варијантама теорије струна) тако да одступања од једне временске осе постају минорни, небитни излети.

Друго. Из математичке теорије хаоса је познат Лоренцов пример са лептиром чији једва видљив покрет крила у једној држави може тако дивергирати (у све веће и веће поремећаје догађаја) да може проузроковати веома видљиву катастрофу у некој другој држави. Слично, малим покретом окидача на пушци могуће је веома променити нечији живот, повређивањем или убиством зауставити у развоју неког успешног конструктора, или напротив спречити акцију неког терористе. Бацањем новчића могуће је донети одлуку о активирању атомске бомбе. Због тога је прича (теорије струна) о обавезној

конвергенцији свих малих и великих случајности заправо неприхватљива.

Треће. Време нама свакако није непосредно видљиво. Ми опажамо време помоћу меморије. Пред нама ниче садашњост коју памтимо, што само значи да је добијамо као иформацију за коју важи какав-такав закон одржања количине. Па ако за датог посматрача важи закон одржања информације, онда ће његова прошлост и даље стајати иста као и свим учесницима из прошлости, ако они оду у различите будућности. Другим речима, догађаји из прошлости ће им се и даље разликовати у оној мери у којој су били различити док су били у заједничкој садашњости.

Са оваквим размишљањем као да се отвара Пандорина кутија која би могла срушити сву физику. Да то није тако доказаћу током излагања последица које ће се показати идентичним много чему у физици данас. Зато ће ова књига бити толико опширна и пуна познатих ствари из савремене теорије релативности и квантне механике (а делом и релативистичке термодинамике), пре свега да би се видела равноправност ових поставки, а тек затим њихове предности. Покушајмо сада разумети најављену поопштену релативност заједно са дивергенцијама времена.

Према принципу вероватноће, углавном, сваки објекат у васиони је увек на крају ланца највероватнијих догађаја. Његово претходно стање прелази у највероватније следеће. Приметимо да се у термодинамици то следеће стање посматра и као стање једнаке или веће ентропије (шта је то ентропија видећемо касније). Како је онда могуће коришћење других димензија времена? Већ смо видели да одговор на ово питање дају силе, односно поремећаји вероватноћа које интерпретирамо као силе.

Расправили смо да телу у инерцијалном кретању, дакле ономе које не осећа дејство вањских сила нити убрзање, нису потребне додатне димензије 4-дим простор-времена. Међутим, појавом убрзања, за дато тело се појављују и додатне димензије простор-времена. Једном убрзано, тело задржава своју прошлост, али одлази у другачију сопствену будућност од оне у коју би иначе отишло, али релативна будућност тог тела (стања која опажа други посматрач) не мора бити једнака сопственој. Управо та разлика између сопственог и релативног виђења ствари чини да појединац не може опажати више од четири димензије простор-времена, при чему је и она четврта, време, само наводно опажана.

Да нема закона великих бројева сада бисмо могли (покушати) тврдити да је наше сопствено време симетрично са свим додатним временским токовима Васионе. Овако морамо радити на кашичицу, детаљ по детаљ.

Сматрајући убрзање, дакле силу, еквивалентом поремећаја вероватноћа, спашавамо универзалност принципа вероватноће. Додајемо да се само за сопственог посматрача највероватније догађа најчешће, али то исто понашање за релативног посматрача може изгледати другачије. Тиме је принцип вероватноће сачуван у општем облику и постављен је модел по којем се може третирати сваки општи принцип природе који је у некој директној вези или је последица принципа вероватноће.

Рецимо[10], *принцип ентропије* је (поопштен) други закон термодинамике: „Укупна ентропија изолованог система се не може смањивати“. Он функционише на исти начин. У инерцијалном кретању је сопствена ентропија тела већа од одговарајуће релативне, али не и у убрзаном кретању. Екстремно даље, тело чије би време текло у супротном смеру враћало би се поново у највероватнија стања, па би и за такво важио принцип вероватноће, а као последица тога одржао би се и принцип ентропије.

[10]У ово верујем али напомињем, за сада је то у домену научне фантастике.

1.3 Информација

Информацију као број су први успешно дефинисали Никвист[11] и Хартли[12] 1928. године. Утврдили су да је информација исхода једног од једнако вероватних могућности пропорционална логаритму броја могућности. Радећи за Белову телефонску компанију развили су идеју информације као „количине вести“, инспирисани новинарством. Већа је вест „човек је ујео пса“ од вести „пас је ујео човека“ јер је прва мање вероватна, приметили су, али нису наивно потрчали да информацију дефинишу просто као број могућности.

Slika 1.4: Информација.

Информација се може дефинисати као најмањи број питања (број $H = 1, 2, 3, \ldots$) потребних да се *бинарним тражењем* дође до (једног од 2^H) одговора. Бинарним поступком скуп непознатих делимо на два дела. Када сазнамо у којем од два дела је оно што тражимо, тај подскуп поново делимо на два дела и тражимо даље. Број претражених елемената 2^H је експоненцијална функција броја дељења H, које називамо информацијом. Дакле, информација је инверзна функција експоненцијалне, па је она логаритам броја могућности, односно негативан логаритам вероватноће исхода

$$H = \log_2 N, \quad H = -\log_2 \frac{1}{N}. \tag{1.1}$$

Број H називамо *Хартлијевом информацијом*, односно информацијом коју садржи N једнако вероватних могућности, а број $P = \frac{1}{N}$ вероватноћом исхода. Испоставило се да је такав избор пун погодак.

На пример, за откривање једног замишљеног (број пет) од првих осам природних бројева ($N = 8$) потребна су три бинарна питања ($H = 3$). На прво питање „да ли је замишљени број мањи од пет“, очекујемо само одговор „да“ или „не“ - одговор је „не“. На друго питање „да ли је замишљени број мањи од седам“ - одговор је „да“. Треће питање је „да ли је замишљени број мањи од шест“ - одговор је „да“. Тако сазнајемо да је тражени број пет.

[11]Harry Theodor Nyqvist (1889-1976), амерички инжењер шведског порекла.
[12]Ralph Vinton Lyon Hartley (1888-1970), амерички инжењер.

Када се могућности множе, тада се информације сабирају, јер је логаритам производа једнак збиру логаритама. Управо је то она особина Хартлијеве информације која ју је повезала са вероватноћом и дала јој крила у употреби. Погледајмо то на примеру вероватноће. Када бацамо фер новчић са две могућности, вероватноћа исхода једне од две је $\frac{1}{2}$. Када бацамо фер коцку са шест могућности, вероватноћа исхода једне од шест је $\frac{1}{6}$. Када бацимо и новчић и коцку број једнако вероватних (парова) могућности је дванаест $(2 \cdot 6)$ са вероватноћом $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Информација једног од тих дванаест парова је збир информације добијене бацањем новчића и информације бачене коцке.

Са овом неочекиваном логаритамскаом адитивношћу, Хартлијева информација од апстрактне идеје постаје помало физикална, материјална ствар. Замислимо да из скупа од m_1 бројева на случајан начин извлачимо један, па онда опет из скупа m_2 бројева извлачимо један и тако даље, до закључно скупа са m_n бројева. Информација свих n извлачења биће једнака збиру информација појединих, без обзира којом брзином или редоследом обављали та извлачења. То произилази из особина логаритамске функције уопште, што нам даје идеју да се база логаритма (број 2) наведене формуле може мењати. Промена базе логаритма Хартлијеве информације просто значи други избор мерних јединица. Када је та база 2 јединица информације је „бит“, када је база Ојлеров број $e \approx 2,71828$ јединица је „нат“ (natural logarithm).

Поред своје логаритамске адитивности, Хартлијева информација има и поменуту новинарску особину да је извеснији догађај мање информативан. Што је мањи број (равноправних) могућности већа је вероватноћа појединог исхода, али је мања његова информација. Принцип реализовања највероватнијег догађаја тако постаје принцип шкртости у давању информације.

Развијајући нову идеју и радећи за исту компанију, Клод Шенонон[13] је 1948. године дефинисао информацију различито вероватних догађаја. Он је посматрао *расподелу вероватноћа* која подразумева да се неки опит реализује у један од $n = 1, 2, 3, \dots$ различитих независних догађаја са вероватноћама чији је збир један. Вероватноће догађаја расподеле су $p_1, p_2, \dots, p_n$ и нека оне носе Хартлијеве информације редом $H_1, H_2, \dots, H_n$. Средња вредност свих, *математичко очекивање*, износи

$$S = p_1 H_1 + p_2 H_2 + \dots + p_n H_n. \tag{1.2}$$

То је *Шенонова информација.* Овај се израз своди на Хартлијев (1.1) када су сви исходи једнаких вероватноћа.

Шенонова информација и даље има ону новинарску особину вести, да је више информативно оно што је мање вероватно. То се може разумети и на примерима узорака текстова. Српска азбука има $n_1 = 30$ слова, енглеска $n_2 = 26$ а знамо да се различити знакови у тексту различитих језика појављују са различитим вероватноћама. Просечна појава слова је n-ти део свих, мада је фреквенција појединог слова углавном различита од $1/n$ броја свих слова у тексту. Ипак, када је $n_1 > n_2$, биће вероватноћа просечне појаве слова у првом тексту мања од таквог у другом, али ће Шенонова информација бити већа.

Највећи недостатак Шенонове информације[14] је њена везаност за расподелу вероватноћа. Она је типична за један процес који из унапред датог скупа на случајан начин генерише исходе, можда различитих али константних вероватноћа. Збир тих

[13] Claude Elwood Shannon (196-2001), амерички математичар.
[14] Не помиње се у литератури.

вероватноћа је један ($p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$) јер је исход из датог скупа сигуран догађај. Међутим, природа не функционише на само тај начин.

Природа често мултипроцесира. На пример, у различитим деловима људског тела се покрећу нервни процеси који контролишу функције јединственог организма на начин који сматрамо независним. То су рад срца и крвних судова, рад јетре, органа за варење, покретање руку и ногу, гледање, говор и многих других. Верујемо да неколико хиљада независних процеса раде у нашем телу стално.

О мултипроцесирањима живих бића сам написао књигу Информација перцепције[15]. Поједностављено речено, та се књига може сматрати и као проверавање само једне формуле која повезује слободу, интелигенцију и хијерархију:

$$\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}. \tag{1.3}$$

Као и у овој књизи и тамо се подразумева постојање различитих опција а *живо биће* је дефинисано својом способношћу да доноси одлуке. Број ℓ је *слобода* јединке, количина могућности коју јединка има захваљујући својим чулима и уопште својим перцепцијама. Вектор $\mathbf{i}$ је *интелигенција* јединке дефинисана као способност њеног коришћења датих могућности. Вектор $\mathbf{h}$ је *хијерархија* дефинисана као способност окружења да јединки ускрати њене могућности. Према томе, слобода живог бића је скаларни производ вектора његове способности и околних ограничења.

У књизи разматрана јединка је човек који живи у друштвеном систему и другим околностима. Међутим, то је и мрав у мрављој колонији, или травка у травњаку. Формула (1.3) једнако важи и за ћелију јетре која је јединка у свом окружењу које чини околно тело живог бића. Веровали или не, тестирајући ту формулу у разним, па и екстремним примерима, нећете је успети оспорити. Са друге стране, она се такође не да нити извести неком дедукцијом из утврђених, па је у томе смислу слична формули кинематике о производу брзине и времена који даје пређени пут ($vt = s$), у време пре Галилеја[16].

У поменутој књизи је наговештено, али није инсистирано, да се израз за слободу (1.3) може проширити и на неживе ствари. Употреба тог израза нас не може довести у контрадикцију, просто зато што он представља у математици проверени и добро познати скаларни производ вектора. Друго, Васионом владају случајности и то на начин мултипроцесирања за чије описивање је Шенонова формула неподесна, ако не и недовољна. Коначно, та се формула своди на Шенонову, када за компоненте првог вектора узмемо вероватноће неке расподеле а за компоненте другог логаритме тих вероватноћа.

У наставку, слободом (1.3), па у извесном смислу и информацијом физичке честице у њеном окружењу, сматрамо број

$$L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \tag{1.4}$$

где су $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ неки, још увек неутврђени вектори аналогни претходно поменутима (интелигенције и хијерархије) али сада у неживом свету физике.

Већ на први поглед намеће се идеја да овакве векторе можемо поредити са импулсом (колочином кретања) и положајем, и отуда ове ознаке. Наравно, нема смисла говорити о импулсу баш као о способности живог бића нити о положају као о његовом окружењу,

[15] в. [1].

[16] Galileo Galilei (1564-1642), италијански математичар, физичар, астроном, филозоф.

као што нема смисла говорити о атому кисеоника у себи као о себи, али видимо неке аналогије. Делом има смисла сматрати импулс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ неком способношћу честице а њен положај њеним односом са окружењем.

Важна аналогија долази и из Хајзенбергових релација неодређености, да није могуће истовремено одредити тачан импулс и положај честице дуж истог правца. Када дуж једне координате (рецимо x-осе) меримо импулс и положај, појавиће се неодређености Δp_x и Δxтакве да је њихов производ реда величине $\frac{\hbar}{2}$ или је већи. Број $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ је константа одређена Планковом константом $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js. Зато се у случају збира производа компоненти импулса и одговарајућих компоненти положаја, за слободу (1.4) може рачунати да је различита од нуле и да је квантована. За сада се нема шта додати, јер физици није страно квантовање слобода.

Са друге стране, могуће је тачно одређивање импулса дуж једне координате и положаја дуж друге. Одсуство слободе тако мешаног слагања производа компоненти L, значи немогућност опажања из једне димензије у другој. Оно правда идеју о вишку димензија (и просторних) образложењем да их не можемо видети јер отуда немамо информације. У другом случају, неодређености импулса и положаја исте димензије, имамо друго откриће: ако такве тачне вредности уопште не постоје, а ми их пишемо као да постоје - имаћемо контрадикцију. Другим речима, није могуће L представити тачним релним бројем (ако таквог нема).

Према томе, за „тачне вредности" информације (1.4) је L комплексан број. Процена броја могућности према Хартлијевој дефиницији је експоненцијална фукција комплексног броја, а то је периодична функција. Нити ово није изненађење, јер се квантна стања изражавају комплексним функцијама $\psi = \psi(x, y, z, t)$ које су периодичне и које се зато називају *таласним функцијама*. Њихови нормирани, коњуговани производи $|\psi|^2 = \psi^* \psi$ представљају вероватноће налажења датог стања на датом месту у датом тренутку. Ово последње је раније поменуто Борново правило квантне механике.

Када са (1.4) представљамо приближне вредности са значењем информације, тада за L мора важити одговарајући[17] принцип минимализма. Назовимо тежњу природе за одавањем што мање информације *принципом информације*. Дакле, имамо природу која настоји реализовати што више од највероватнијих догађаја због чега она неминовно претвара неизвесност у информацију. Природа као да се настоји отарасити своје неизвесности. Са друге стране, она тако реализује што је могуће мање информације (оно што је вероватније мање је информативно). Испоставља се да је природа шкрта са давањем информације, парадоксално, као да жели да сачува своју неизвесност. Обоје, трошење неизвесности и шкртост у давању информације долазе из истог принципа вероватноће а, као што видимо, у томе нема контрадикције.

Информација која се стално производи дефинише нашу *садашњост*. Оно што доживљавамо као „сада" заправо је информација настала реализациојм неизвесности, што је опет било неизбежно због принципа вероватноће. Опажено „сада" настаје као информација која стално дефинише нови простор, време и материју. Према томе за простор, време и материју морају важити слични закони логике, као да су то три различита аспекта једне исте супстанце.

Лако је видети да се (1.4) своди на Шенонову информацију стављајући за компоненте првог вектора $p_k \in (0, 1)$ вероватноће неке расподеле а одговарајуће другог $q_k = -\ln p_k$. Такви вектори $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ су веома зависни, а са друге стране, сваки сабирак је позитиван број ($p_k q_k > 0$), јер потпуно известан исход ($p_k = 1$) овде не долази у обзир. Слично

[17] Одговарајући принципу вероватноће.

важи и у општем случају, када различити услови мењају вредности датих вектора, а производи њихових одговарајућих компоненти не исчезавају. Тада постоји нека веза међу самим векторима. Ако оба вектора представљају неке вероватноће, а број L не исчезава, тада те вероватноће нису независне.

Није спорно да постоје зависни случајни догађаји и да је рад са таквима добро познат теорији вероватноће, али сада приметимо да нас они доводе (скоро) до парадокса. Физички експеримент је обављање и посматрање интеракција између одређених појава, физичких система, честица. Уобичајено кажемо да се то међу честицама дешавају размене информација, па чак и да је свака интеракција нека размена информације. Штавише, не можемо да верујемо да би могла постојати (тачније речено нема је смисла разматрати у физици) интеракција без размене информације. Међутим, то је нетачно. Између зависних случајних догађаја постоји веза, физички утицај једног на други, а без претходне конверзије неизвесности у информацију.

Овде се можемо позвати на *квантну спрегнутост*, појаву квантне механике коју су открили Ајнштајн, Подолски и Розен (в. [16]). Квантна спрегнутост је случај зависних догађаја, када се догађа интеракција без преноса информације[18]. Прецизније речено, то је интеракција без реализације случајности у информацију (која би се затим пренела па тамо негде била поново конвертована у неизвесност). Покаже ли се да је таква појава физички могућа, то ће и даље значити да физичка информација значи интеракцију, али не и обрнуто. Додатно, она ће нагласити закон одржања збирне неизвесности и информације, поред закона одржања саме информације.

Знамо да реализацијом случајног догађаја количина неизвесности која се реализује произведе једнаку количину информације. Рецимо, неизвесност пре бацања коцке тачно је једнака информацији добијеној након бацања. Нема разлога да не верујемо да и у физици важи исто. Како се једном добијена информација не да више опозвати, то верујемо да важи и закон одржања информације. Управо због тог закона имамо прошлост коју не можемо мењати, али и могућности да посматрамо догађаје у експерименту. Када бисмо веровали да информације настале посматраним интеракцијама могу тек тако нестати или се претворити у нешто друго, ми уопште не бисмо веровали да експеримент може нешто доказати.

Принцип вероватноће налаже да се из неизвесности реализују што вероватнија стања, али не и да максимуми вероватноћа за сваког посматрача буду исти. Он дозвољава сличности и разлике између виђења сопственог посматрача (оног у датом систему) и релативног посматрача (који дати систем посматра из неког другог). У случају теорије релативности, сличности су у једнаком важењу закона физике за сваког сопственог посматрача, а разлике, рецимо, у брзини тока времена сопственог и релативног посматрача.

Релативно време иде спорије од сопственог, па доследно, релативни посматрач види и спорију производњу информације од сопственог. Отуда, он једнако дефинисани број L формулом (1.4) види пропорционално мањим него што га види сопствени посматрач. Ово нас води на закључак да је L пропорционално *лагранжијану*, разлици кинетичке и потенцијалне енергије

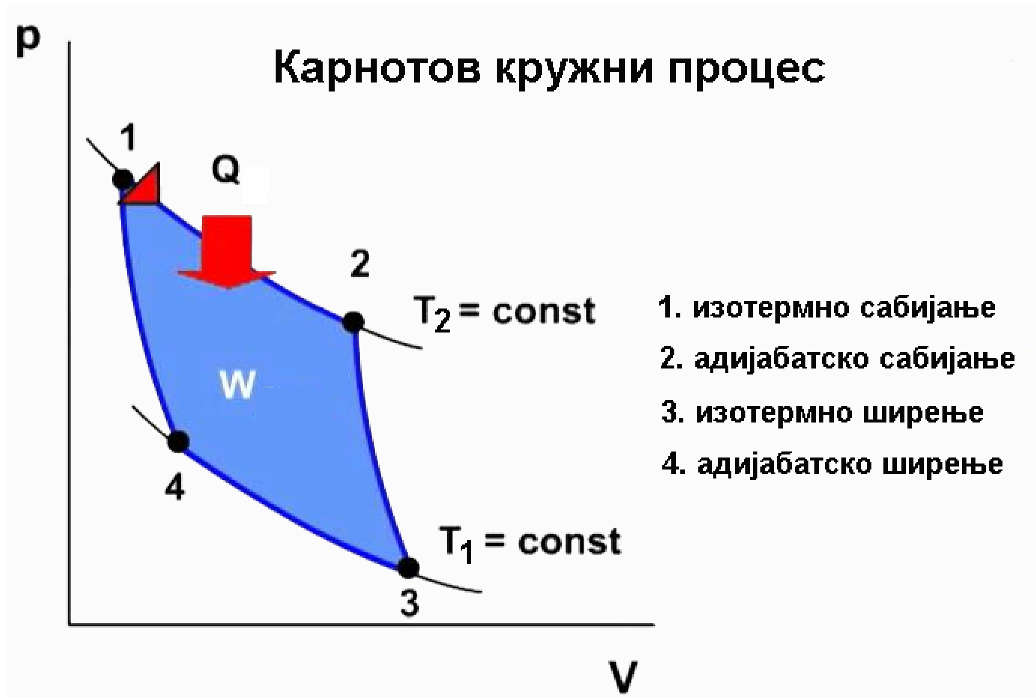
$$\mathcal{L} = E_k - E_p, \tag{1.5}$$

који се разрађен у теорији релативности понаша на управо описани начин. Лагранжијан изражава познати *принцип најмањег дејства* у физици, што је такође у складу са претходним тумачењем информације.

[18] Они је нису тако разумели.

1.4 Ентропија

Лазар Карнот[19], иначе познатији као организатор победе у француској револуцији, је 1803. године открио да природни процеси имају неку унутрашњу склоност расипања корисне енергије. Желећи да дизајнира машину максималне ефикасности описивао је кружни процес стискања и ширења гаса у четири такта: 1. изотермно (при константној температури T) сабијање, 2. адијабатско (при константној топлоти Q) сабијање, 3. изотермно ширење и 4. адијабатско ширење. Ове четири фазе које се називају Карнотов кружни процес, приказује слика 1.5. Из таквих радова је настала грана физике данас позната као *термодинамика*.



Slika 1.5: Дијаграм запремине V и притиска p.

Развијајући сличне идеје, Клаузијус[20] је од 1850. године анализирао изоловане системе у термодинамичкој равнотежи. Он је 1865. године у физику увео појам *ентропије*[21] (S) дефинишући је као енергију која се више не може претворити у слободан рад (W). У термодинамици ентропија је и данас величина која представља недоступност топлотне енергије (Q) за претварање у механички рад, која се често интерпретира као степен нереда или случајности датог физичког система.

Након тога су научници попут Болцмана[22], Гибса[23] и Максвела[24], ентропији дали статистичко значење. Термодинамичка дефиниција ентропије описује њену употребу у експериментима, док статистичка развија тај концепт, дајући му дубље значење.

[19] Lazare Carnot (1753-1823), француски политичар, инжењер и математичар.
[20] Rudolf Clausius (1822-1888), немачки физичар и математичар.
[21] грч. $\epsilon\nu\tau\rho o\pi\eta$ - обрт ка унутра
[22] Ludwig Boltzmann (1844-1906), аустријски физичар и филозоф.
[23] Josiah Willard Gibbs (1839-1903), амерички инжењер, физичар и математичар.
[24] James Clerk Maxwell (1831-1879), шкотски математички физичар.

Концепт ентропије је произашао из *Карнотовог циклуса* на апстрактан, који није експерименталан, начин. На слици 1.5 је приказан кружни термодинамички циклус преноса топлоте Q из стања више у стање ниже температуре T и обрнуто, где је $T_1 < T_2$. Топлота Q_2 са температуре T_2 прелази у хладни резервоар температуре T_1 у топлоту Q_1. Према Карноту, рад W може произвести само онај систем у којем се мења температура, а он би требао бити нека функција разлике температура и апсорбоване топлоте. Прецизније:

$$W = \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2}\right) Q_2 = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_2 \tag{1.6}$$

је максимални рад који топлотна машина може произвести.

Међутим, Карнот је погрешно узимао да је $Q_2 = Q_1$ јер је тада актуелна теорија калорија сматрала да у сваком случају важи закон одржања топлоте. Тек након Клаузијуса и Келвина[25] ми данас знамо да је заправо $Q_2 > Q_1$, а отуда имамо и апсолутну, Келвинову скалу температура. Рад који произведе систем је разлика између апсорбоване топлоте топијег резервоара и топлоте предате хладнијем:

$$W = Q_2 - Q_1. \tag{1.7}$$

Из претходне и ове једнакости (у случају максималног рада) следи:

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0. \tag{1.8}$$

где је са $\Delta S = S_2 - S_1$ разлика неке непознате функције која има физичку димензију топлоте подељене температуром. Ова једнакост потврђује *први закон термодинамике*: укупна енергија изолованог система је константна. Енергија се може трансформисати из једног облика у други, али не може настати из ничега нити може нестати.

Такође, једнакост (1.8) имплицира да постоји нека функција стања

$$S = \frac{Q}{T}, \tag{1.9}$$

која не мења вредност (конзервирана је) током (оптималног) Карнотовог циклуса. Ту функцију је Клаузијус назвао ентропијом. Даља открића у овој области учинио је Болцман[26] откривши да је логаритам броја $|\omega|$, начина једноликог распоређивања ω који су потскуп Ω свих начина рапоређивања гаса у соби, једнак Клаузиусовој ентропији

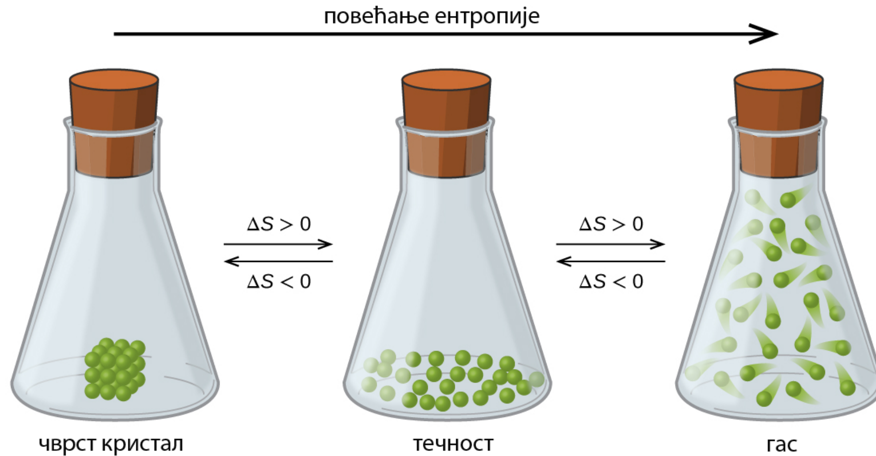
$$S = k_B \ln|\omega|, \tag{1.10}$$

где је $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ m^2 kg s^{-2} K^{-1} Болцманова константа[27]. До броја $|\omega|$ воде они распореди ω који су највероватнији, а то су равномерни распореди по свим могућим позицијама молекула. Наиме, на $n \in \mathbb{N}$ молекула има $n! = 1 \cdot 2 \dots n$ пута више равномерних распореда од рецимо распореда истих молекула у гомили. Зато што је Болцманова ентропија максимална за расуте гасове, зато понекад кажемо да ентропија представља количину нереда.

На слици 1.6 је приказано повећање Болцманове ентропије $\Delta S = S_2 - S_1$ из вредности S_1 у S_2 које се дешава преласком супстанце из чврстог у течно и даље у гасовито стање.

[25]William Thomson, 1st Baron Kelvin (1824-1907), шкотско-ирски математичар и физичар.
[26]Ludwig Boltzmann (1844-1906), аустријски математичар, физичар и филозоф.
[27]Важи за природни логаритам, са базом $e \approx 2,71828$.

Слично се дешава у спонтаном процесу испаравања, када молекуле слободне да иду у било којем правцу заузимају све већу запремину. То је данас добро познато и свима нам изгледа сасвим једноставно. Мање је познато да је Болцман извршио самоубиство и то не због тога што је полудио, већ зато што се није могао носити са исмевањем својих колега физичара који су се тада ругали његовом наводном открићу.



Slika 1.6: Промена ентропије.

У обрнутом процесу на истој слици 1.6, преласком из гасовитог у чврсто стање, ентропија се смањује. Расуте молекуле гаса се неће тек тако сабити на гомилу, па је за смањивање ентропије потребна додатна енергија. Слично томе, када кристална посуда падне и разбије се, ентропија се повећа, али није могуће њено спонтано враћање на нижу вредност, односно враћање кристала у претходно неоштећено стање.

Уопште, када једнако вероватне исходе поделимо у групе, више реализација биће у групи са више исхода. На пример, у случају бацања фер новчића два пута, могући исходи су једнако вероватни елементи скупа $\Omega = \{ПП, ПГ, ГП, ГГ\}$. Исход да је два пута пало писмо је подскуп $\omega_1 = \{ПП\}$, а исход да је пало и писмо и глава је подскуп $\omega_2 = \{ПГ, ГП\}$. Како други подскуп има више елемената, $|\omega_1| = 1$ а $|\omega_2| = 2$, он ће се чешће реализовати. То оставља утисак да природа радије реализује оне случајне догађаје који имају више (једнако вероватних) опција, као да и она воли слободу, што је такође последица принципа вероватноће.

Знамо да природа тежи стањима веће ентропије, као на слици 1.6, а то значи и Болцманове ентропије (1.10), односно логаритма броја $|\omega|$ који је број исхода већег од могућих распореда. То је смисао *другог закона термодинамике*: укупна ентропија изолованог система може само расти временом. Она може остати константна у идеалном случају када је систем у стању равнотеже, у стабилном стању, или када је подвргнут реверзибилном (повратном) процесу. Због спонтаног повећања ентропије, у савременој физици се природни процеси сматрају иреверзибилнима (неповратнима), а прошлост несиметричном са будућношћу. Спонтану тежњу природних система да очувају или повећају ентропију назовимо *принцип ентропије*.

Вероватноћа „већег“ распореда (неког исхода из „већег“ скупа исхода) је

$$P = \frac{|\omega|}{|\Omega|}, \tag{1.11}$$

где је $|\Omega|$ број свих могућих исхода. Према томе, веће учешће вероватнијих (ω) у скупу свих исхода (Ω) даје већу вероватноћу (1.11) и већу ентропију ($S = k_B \ln|\omega|$). Али, за разлику од информације, ентропија није логаритам вероватноће, већ је логаритам њеног дела. Промена $\omega \to \omega_1$ на скуп са још већим броје исхода ($|\omega_1|$) неког другог распореда (у оквиру свих Ω), износи $\Delta|\omega_1| = |\omega_1| - |\omega|$, резултираће променом ентропије и вероватноће редом:

$$\Delta S = k_B \ln \frac{|\omega_1|}{|\omega|}, \quad \Delta P = \frac{\Delta|\omega_1|}{|\Omega|}. \tag{1.12}$$

Зато што је разлика логаритама једнака логаритму количника зато ни разлика ентропија није просто логаритам разлика вероватноћа.

Резултате класичне термодинамике, као и резултате теорије релативности, овде нећемо оспоравати, али морамо приметити неслагања са резултатима савремене релативистичке термодинамике. Како је то могуће? Па, пре свега зато што релативну и сопствену вероватноћу овде не сматрамо једнакима, за разлику од савремене физике, а затим и зато што то можемо оправдати. То ћемо правдати прво познатим ставом да се релативистичка термодинамика може третирати на различите начине а да се при томе класична термодинамика и теорија релативности не морају мењати.

Током 20. века па до данас објављени су многи научни радови из области релативистичке термодинамике са којима се овде нећу слагати. Поменућу само неке. Ајнштајн је 1907. године предложио да се ентропија сматра Лоренцовом инваријантом (да се не мења због кретања система), те да су топлота и температура система у кретању мање од сопствених (виђених у мировању). Исто је предложио и Планк[28] 1908. године. Затим је От 1963. године тражио сасвим супротно, да су топлота и температура у кретању веће од одговарајућих у мировању, а да је ентропија такође иста. Ландсберг је негде у то време дошао до закључка да топлоту тела у кретању треба сматрати мањом, а температуру и ентропију непромењивим. Ван Кампен је откривао да су све три константне. На крају је Балеску доказао да је то свеједно, да се релативистичка термодинамика може третирати на различите начине тако да класична термодинамика и теорија релативности могу остати непромењене.

Због мноштва оваквих контрадикторних налаза, у физици се данас температура дефинише само за два тела у релативном мировању једно поред другог, па тамо где топлота одлази кажемо „тамо је хладније“. Затим правимо сложеније апарате за мерење температуре, корак по корак, почев од контактних топломера па до неконтактних термометара. Међу најсавременије такве уређаје спадају инфрацрвени термометри који температуру изводе из количине топлотне радијације (тзв. зрачења црног тела) емитованог из предмета мерења. Они се називају и ласерским термометрима, јер користе ласере за навођење. У следећој секцији ћемо видети да овакви термометри потврђују (хипо) тезе које овде износим.

Контактно мерење температуре тела у кретању је ретко могуће, а када је могуће није поуздано. На пример, у споријој ваздушној струји тела се хладе због јачег испаравања (дувајући хладимо супу), али при већим брзинама ваздуха она се ипак загревају, сматрамо због доминантнијег претварања кинетичке енергије која се трењем преноси на тело и прелази у топлоту. При још већим брзинама, ваздух се не може довољно брзо склањати испред предмета и бива компресован, проузрокујући још јаче загревање тела. Сателит који великом брзином улеће у атмосферу веома се загрева, па и сагорева.

[28]Max Planck (1858-1947), немачки физичар.

Све то указује да температура предмета (топломера) у струји ваздуха није исто што и температура самог ваздуха. Ипак приметимо да се у аеронаутици узима да је приближна просечна разлика (сопствених) температура ваздуха и загрејаног предмета преко којег се ваздух креће пропорционална квадрату брзине ваздуха, што нас наводи на закључак да температура расте са кинетичком енергијом. Подсетимо се сада шта је то кинетичка енергија.

Из специјалне теорије релативности знамо[29] да за енергију тела у кретању важе релације:

$$E = \gamma E_0, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.13}$$

где E_0 енергија датог тела у мировању а E енергија истог у кретању брзином v. Брзина светлости у вакууму $c = 3 \cdot 10^8$ m/s не зависи од брзине кретања извора светлости. Развојем у степени ред релативистички коефицијент даје:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots, \quad \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots, \tag{1.14}$$

где нису написани сабирци четвртог и вишег степена брзина, јер су занемарљиви за релативно мало v у односу на c. Када развијено γ вратимо у претходну формулу и ставимо за кинетичку енергију $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2 + \dots$, добијамо

$$E = E_0 + E_k, \tag{1.15}$$

јер је $m_0 = E_0/c^2$ маса датог тела у мировању.

Добијени израз, а и сам поступак нам говоре неколико ствари. Прво, температура T коју ће показати топломер у струји (идеалног) ваздуха брзине v може се апроксимирати изразом

$$T = \gamma T_0, \tag{1.16}$$

где је T_0 температура коју би показао топломер изван струје. Друго, релативна енергија (E) тела је збир сопствене (E_0) и кинетичке (E_k). То је укупна енергија тела у кретању и ту нема места за повећање топлотне енергије, нити рецимо осцилаторне (молекула) или хемијске. Дакле, кретањем се повећава само транслаторна енергија, па је

$$Q = Q_0, \tag{1.17}$$

где су Q и Q_0 редом релативна и сопствена топлотна енергија. Зато топлоту Q назовимо *топлота ентропије*, за разлику од рецимо енталпије коју ћемо размотрити касније.

Са овим објашњењем, релативна ентропија (1.9) постаје

$$S = S_0/\gamma, \tag{1.18}$$

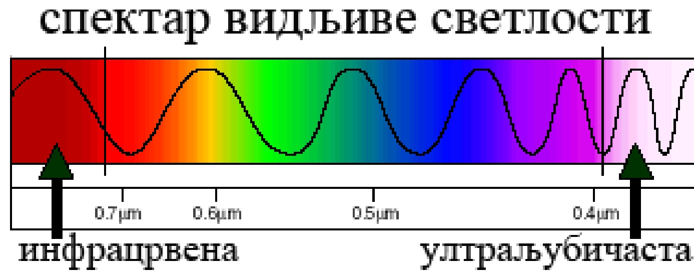
где је S_0 сопствена ентропија, а γ је релативистички коефицијент (1.13). То значи да се ентропија смањује са повећањем релативне брзине тела.

Овај резултат је за савремену физику чудан али овде није неочекиван. На пример, у објашњењу уз лангранжијан (1.5) напоменуто је да је релативна вероватноћа другачија од сопствене, те да зато релативни посматрач види систем сопственог са успореном производњом информације и зато успореним током времена. Логично је очекивати да и Болцманова ентропија (1.10) за релативног посматрача има мање вредности и то у складу са (1.16). То је управо зато што она и даље представља најоптималније начине распоређивања гаса, али сопствена и релативна вероватноћа нису једнаке.

[29] Ово ћемо доказивати касније.

1.5 Доплеров ефекат

Закључак (1.16) подржава и технологија инфрацрвених термометара. Електромагнетни спектар садржи видљиву светлост (слика 1.7). Од највећих (инфрацрвено, 700 nm) до најкраћих (ултраљубичасто, 400 nm) таласних дужина зрачења. Сав спектар извора Е-М таласа у кретању прави *помак ка црвеном*, дакле ка топлијем, на начин да се свугде у физици израз „Доплеров ефекат“ може заменити са „већа температура“, а да физика остане без контрадикције.



Slika 1.7: Део електромагнетних таласа.

Доплеров ефекат је рецимо виши тон звука сирене која нам се приближава или нижи када се удаљава. Обрнуто фреквенцији f се мења таласна дужина λ, јер је њихов производ једнак константној[30] брзини таласа извора у мировању $c_z = \lambda f$. То је особина свих таласа која нам у случају светлости постаје нарочито занимљива.

Знамо да извор таласа сопствене[31] таласне дужине λ_0 и фреквенције f_0, који се креће брзином $\pm v$ по правцу на којем се налази посматрач, има таласну дужину и фреквенцију у односу на посматрача, редом:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}, \quad f = f_0 \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}, \tag{1.19}$$

при чему предзнак минус узимамо када се извор приближава, а плус када се удаљава. Константа $c = 3 \cdot 10^8$ је брзина светлости у вакууму. Означимо ли са λ_- и λ_+ таласне дужине редом долазећег и одлазећег таласа, видимо да важе неједнакости:

$$\lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+, \tag{1.20}$$

када је брзина $v > 0$. Средња вредност (аритметичка средина) ове уздужне (лонгитудиналне) опажене таласне дужине је:

$$\lambda_l = \frac{1}{2}(\lambda_- + \lambda_+) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.21}$$

Када посматрач није на правцу кретања извора таласа и гледа окомито на тај правац ка извору, опажаће попречну (трансферзалну) таласну дужину

$$\lambda_t = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.22}$$

[30]Брзина звука c_z у води је око 1500, у ваздуху 340, а у вакууму 0 метара у секунди.
[31]Сопствена - опажена са извора у мировању.

Дакле, опажена средња лонгитудинална и трансферзална таласна дужина су једнаке. Обе су веће од сопствене. Међусобно су различите долазећа опажена, сопствена и одлазећа опажена таласна дужина.

Релативистички Доплеров ефекат је добро познат физици, али не и интерпретација овде, да он једноставно значи промену релативне вероватноће средине и температуре таласа чији извор се креће у односу на запажање сопственог посматрача (који мирује у односу на извор). Штавише, тврдим да релативистички Доплеров ефекат указује на исте промене самог простора, система координата везаних за извор Е-М таласа.

Положај честице-таласа размазан је дуж њене таласне дужине тако да већа таласна дужина значи мање тачну позицију честице, односно мању густину вероватноће њеног налажења на датом месту, а обрнуто, краћа таласна дужина даје прецизније место налажења честице. Према томе, из претходних једначина следи да позиције таласа извора у кретању имају мање вероватноће од истих позиција извора у мировању.

Знамо да се обични Доплеров ефекат изводи из обичних (Галилејевих) трансформација, а да се овде наведени релативистички Доплеров ефекат изводи из (овде још увек не наведених) Лоренцових трансформација специјалне релативности. Међутим, средње вредности релативне лонгитудиналне таласне дужине (1.21), а посебно релативна трансферзална таласна дужина (1.22), могу се разумети и помоћу успоравања времена у односу на релативног посматрача, које ћемо сада објаснити.

Пример 1.5.1 (Дилатација времена)**.** *Показати да за релативно Δt и сопствено Δt_0 протекло време важи једнакост*

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0, \tag{1.23}$$

где је $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, а v релативна брзина између два инерцијална система.

Решење. Из специјалне теорије релативности знамо да су кретања релативна и да је брзина светлости у вакууму независна од брзине извора. Отуда, за два догађаја са координатама (r_1, t_1) и (r_2, t_2) дуж неког правца кретања у два тренутка, ако ставимо $\Delta r = r_2 - r_1$ и $\Delta t = t_2 - t_1$, израз за квадрат интервала

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 \tag{1.24}$$

биће исти у оба инерцијална система. Када се таква два система координата K и K' крећу дуж датог правца константном брзином $\pm v$ један у односу на други, важи:

$$\Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 = (\Delta r')^2 - c^2 (\Delta t')^2.$$

Сопствено време посматрача из K' означимо са $\Delta t' = \Delta t_0$. Тада је $\Delta r' = 0$ (он мирује у свом систему), па добијамо:

$$\Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 = -c^2 \Delta t_0^2,$$

$$\left[\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2 - c^2\right] \Delta t^2 = -c^2 \Delta t_0^2,$$

$$(v^2 - c^2) \Delta t^2 = -c^2 \Delta t_0^2,$$

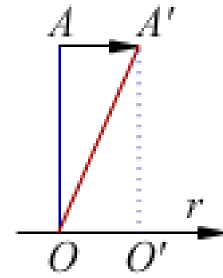
а отуда (1.23). Дакле, сопствено време гледано из другог система тече спорије. □

Са успоравањем времена сразмерно успоравају опажене фреквенције а због $\lambda f = c$ повећавају се таласне дужине. Резултат је једнак претходним (1.21) и (1.22). Остаје питање различитих долазећих и одлазећих таласа (1.20).

Због споријег протицања времена система у кретању, честица која нам долази налази се у нашој будућности и све је ближе нашој садашњости док се њена удаљеност од нас смањује, да би након мимоилажења одлазећи од нас била све даље у нашој прошлости. Такође смо и ми у будућности честице која нам долази, а у прошлости оне која одлази. На тај начин таласи који нам долазе дефинишу нашу будућност, а одлазећи прошлост. Са једне стране то значи објективност наше историје и потврду закона одржања информације. Наша прошлост је објективна колико је објективно опажање честице коју ми опажамо. Са друге стране, из неједнакости (1.20) следи да нам је будућност вероватнија од садашњости, а да је прошлост мање вероватна од обе. Зато опажамо да нам време тече од наше прошлости преко садашњости ка будућности. Склад ових објашњења сматрам потврдом основне идеје о природи времена, али и нове хипотезе (1.16) о већој релативној температури.

Сви посматрачи у инерцијалном кретању станују у истом простор-времену, али га не виде сви исто. Само брзина светлости у вакууму ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) им је свима једнака и то нам даје за право да управо таласе светлости (Е-М зрачења) узимамо за дефиницију простор-времена. Зато је интервал (1.24) толико важан, јер је за сваког посматрача $\Delta s = 0$, а затим је и остатак пута ($\Delta s \ne 0$) неке спорије честице који се може допунити светлошћу једнак за све посматраче. Све остало изводимо из те ставке да је Δs^2 инваријанта за све, попут Питагорине теореме у класичној геометрији.

Тако смо дошли до закључка (1.23) да је релативно време спорије од сопственог. Помоћу слике 1.8, објаснићемо и релативно скраћивање (контракцију) дужина дуж правца кретања r. У односу на сопственог посматрача у координатном систему K', окомито на његов правац кретања послата је зрака светлости OA коју он после неког времена види опет окомиту као $O'A'$. Релативни посматрач из K кретање те светлости види по хипотенузи OA' правоуглог троугла $\Delta OAA'$. Сопствени посматрач види краћи пут светлости (катета OA) али му време спорије пролази, па види брзину светлости истом.



Slika 1.8: Кретање.

Да би брзине светлости за њих биле тачно једнаке, мора бити дужина хипотенузе $\overline{OA}'$ за сопственог посматрача једнака дужини катете $\overline{OA}$ за релативног. Другим речима, морају дужине по правцу кретања сопственог посматрача бити тачно онолико пута краће за релативног, колико пута му време протиче спорије. Отуда формула за *контракцију дужина*

$$\Delta r = \Delta r_0 \gamma^{-1}, \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{1.25}$$

где је Δr_0 сопствена дужина по правцу кретања а Δr одговарајућа релативна. Дужине окомите на правац кретања остају једнаке за оба посматрача.

Да би се телу дате масе повећала брзина мора му се додати кинетичка енергија. Тиме се повећава укупна енергија тела и успорава време. Спорије време значи већу инертност тела, што значи повећање његове релативне масе, а то опет (због закона одржања масе и енергије) може резултирати само из поменутог повећање енергије. Укратко, то је објашњење (1.13) и формула:

$$m = \gamma m_0, \quad E = mc^2, \tag{1.26}$$

где је m_0 сопствена а m релативна маса укупне енергије E. Ове формуле ћемо детаљно изводити касније.

У међувремену приметимо да Доплеров ефекат и ове формуле имплицирају да можемо сматрати да постоји само један фотон, односно једна врста електромагнетних зрачења са мноштвима релативних посматрања. Постоје многи системи у разним релативним кретањима за сваког посматрача унутар Васионе. Из константности производа таласне дужине и фреквенције фотона, $\lambda f = c$, следи да опажања најфреквентних иду са најкраћим таласним дужинама, а то значи са опажањем простора са највећим вероватноћама. То су системи са највећим енергијама и највећим релативним брзинама. У граничном случају, места без неизвесности постају она са апсолутно тачним положајима и бескрајним енергијама.

Дакле, из теорије релативности знамо да су релативне масе молекула тела у кретању веће и то тачно онолико пута колико им време тече спорије. Даље процењујемо да осцилаторна релативна енергија молекула може остати једнака сопственој, јер колико се може добити повећањем маса тачно толико се може изгубити успоравањем фреквенција, што је је у складу са закључком (1.15), да у релативном повећању енергије нема места за било коју другу енергију осим кинетичке. Међутим, закључак да у повећању кинетичке енергије кретањем тела нема промене његове топлотне енергије, да важи једнакост (1.17), директно је супротан[32] савременој физици.

Резимирајмо сада, са нових позиција, шта се догађа када тело у кретању удари у препреку и заустави се загрејано. Тело у инерцијалном кретању брзином $v > 0$ у односу на датог референтног посматрача има већу укупну енергију $E = \gamma E_0$ и већу температуру $T = \gamma T_0$, непромењену топлоту $Q = Q_0$, али смањену ентропију $S = S_0/\gamma$. У тренутку удара у препреку и заустављања, релативна брзина тела постаје $v = 0$, кинетичка енергија постаје топлотна, а температура остаје непромењена - али сада у односу на (истог) посматрача који релативно мирује. Температура коју тело има у мировању непосредно након судара је она релативна температура коју је тело имало док се кретало.

Све ово смо објашњавали узимајући само примере из специјалне релативности, али слично важи и у општој. У присуству гравитације време успорава, због чега се дешава гравитациони *црвени помак* који је у смислу претходног објашњења еквивалент Доплеровог помака. Овде можемо додати да то значи повећање температуре положаја (тачака које мирују у односу на извор гравитације) у гравитационом пољу. Када брзину из коефицијента γ заменимо гравитационим потенцијалима, претходни резиме остаје. Потенцијална енергија тела у гравитационом пољу се мења (кретањем и кинетичка), али не и топлотна. У статичним тачкама јачег поља ентропија је мања.

Због принципа ентропије (као и вероватноће), тело задржава своје инерцијално кретање јер му сва друга релативна кретања имају мању ентропију. У присуству гравитационог поља оно се креће геодезицима, кажемо слободно пада, јер су то путање константне (како вероватноће тако и) ентропије. Изван своје путање, сваки другу геодезијску линију (слободног) падања дато тело види у стањима ниже ентропије, те му није могућ спонтани прелазак на такву. Специјални случај овога је тело које мирује у пољу неке планете и које спонтано може сићи на нижу висину само са повећањем брзине, јер би на мањој висини у стању мировања имало мању ентропију.

[32]Зато сам цело поглавље морао назвати „Спекулације“.

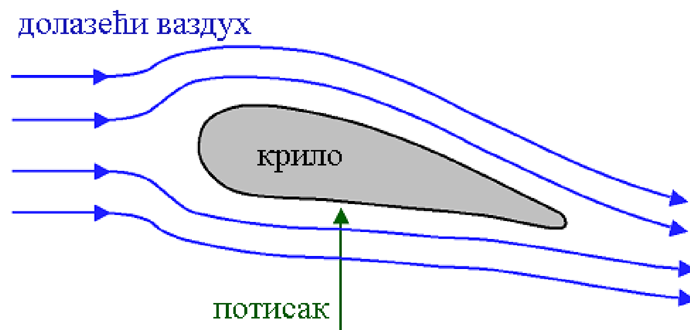
1.6 Притисак

У претходне две секције је уведена и образложена хипотеза да је релативна топлотна енергија једнака сопственој (1.17). То је у нескладу са савременом релативистичком термодинамиком где се узима да је топлотна енергија пропорционална или тачно једнака укупној енергији тела, те је већа када се тело креће. Занимљиво, посебно зато што су идеје које овде износим сасвим у складу и са класичном термодинамиком и са теоријом релативности. Отуда потреба за још једним пажљивим разматрањем параметара који доводе до неслагања. Међу њима је најважнији притисак.

У класичном смислу притисак ствара бубање молекула по некој површини, од којег нам затим долазе физички ефекти. Било да оне одскакују од ударене површине или се лепе за њу, притисак производи кинетичка енергија молекула у слободном кретању, па нас неће изненадити да притисак зависи од густине ρ гаса или течности која генерише притисак, затим од квадрата брзине молекула, v^2, па према томе и од релативистичког коефицијента γ из претходних једначина. Како брзине молекула могу имати различите смерове и интензитете, то и притисак исте средине може бити различит у различитим смеровима, те је он пре *тензор* него *скалар*. На пример, знамо да за бочни (трансферзални) притисак P_t, окомит на правац тока (флукс) гаса или течности брзине v и густине ρ важи Бернулијева[33] једначина

$$P_t + \frac{1}{2}v^2\rho + g\rho z = \text{const}, \tag{1.27}$$

где је g гравитационо убрзање, а z висина на коју се флукс пење. Повећањем (смањењем) квадрата брзине овај притисак се смањује (повећава), што значи да P_t није инваријанта кретања. Већ тиме је непоуздан исказ да је притисак Лоренцова инваријанта, који је иначе уобичајен у савременој релативистичкој термодинамици.

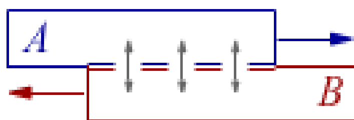


Slika 1.9: Ваздух струји око крила авиона.

На слици 1.9 видимо примену Бернулијеве једначине на лет авиона. Авион се креће великом брзином да би ефекат квадрата брзине v^2 у формули (1.25) био што већи. Крило авиона је глатко и аеродинамично тако да ваздух лако клизи око њега, али је оно таквог облика да је путања ваздуха са горње стране дужа па је са те стране већа брзина ваздушне струје која ствара већи бочни притисак (узгон) на струју ваздуха од онога са доње стране крила. Зато је потисак одоздо ка горе већи, а тај је у случају хоризонталног лета авиона тачно у равнотежи са тежином авиона.

[33]Daniel Bernoulli (1700-1782), швајцарски математичар и физичар.

Бернулијева једначина мора функционисати и у случају мимоилажења две собе A и B, које се одозго виде на следећој слици 1.10. Имеђу соба су отвори за слободан пролазак ваздуха. Ако се у односу на вањског посматрача обе собе крећу истим брзинама, соба A десно а соба B лево, због симетрије нема кретања ваздуха између. Међутим, шта ће видети посматрач који седи у соби A и који према специјалној теорији релативности може сматрати да се само соба B креће? Или обрнуто, шта ће рећи посматрач који мирује у соби B и једнако је у праву када сматра да се креће само она друга соба?



Slika 1.10: Собе A и B у узајамном кретању.

Наравно да и вањски посматрач који сматра да се обе собе крећу мора бити у праву, па зато закључујемо да нема кретања ваздуха између соба. Међутим, Бернулијев бочни потисак би за посматрача из A морао проузроковати одлазак ваздуха из собе A ка соби B, осим ако се у соби B управо због тог становишта не појави релативни надпритисак ваздуха у самој соби B. Тај надпритисак би морао бити тачно толики да би могао спречити кретање ваздуха између A и B.

Због релативне контракције дужина по правцу брзине (1.25), запремина собе у кретању износи

$$V = V_0/\gamma, \tag{1.28}$$

где је V_0 њена сопствена запремина. Запремина собе се смањује, што према Бојл-Мариотовом закону[34], да је производ притиска и запремине константан, значи да се притисак ваздуха у покретној соби повећава на

$$P = \gamma P_0, \tag{1.29}$$

где је P_0 притисак ваздуха у соби која мирује. Отуда закључак да Бернулијеву једначину (1.27) за бочни (трансферзални) притисак у хоризонталном кретању треба писати

$$P_t = \gamma P_0, \tag{1.30}$$

јер је $P_0 = P_{0t}$ бочни притисак када се флукс не креће ($v = 0$).

Савршен или *идеалан гас* је теоријиски гас који се састоји од тачкастих честица у насумичном кретању чије једине интеракције су савршени еластични судари. Један *мол* идеалног гаса има запремину 22,71 литара у нормалним условима, на температури 273,15 Келвина (нула Целзиуса) и под апсолутним притиском од 10^5 Паскала (око једне атмосфере). У нормалним условима се многи гасови (азот, кисеоник, водоник, племенити гасови) понашају попут идеалног. Уопште, гасови су сличнији идеалном на вишим температурама и нижем притиску, када потенцијална енергија међу молекулама постаје мање битна у односу на кинетичку енергију и када је удаљеност између молекула већа.

Треба знати да модел идеалног гаса не успева на нижим температурама или вишим притисцима, када међумолекуларне силе и размаци постају важни. Такође, тај модел

[34]Boyle's law: https://en.wikipedia.org/wiki/Boyle%27s_law

не важи за многе тешке гасове. На нижим температурама је притисак реалног гаса често значајно мањи него код идеалног гаса. На пример, модел идеалног гаса уопште не предвиђа прелазак из гасовитог у течно агрегатно стање, уобичајен за реалне гасове са смањивањем температуре.

У идеалном гасу везу између притиска, запремине, температуре и количине гаса изражава једначина идеалних гасова

$$PV = nR_uT, \tag{1.31}$$

где је P апсолутни притисак (у Њутнима по метру квадратном), V запремина посуде (у метрима кубним), n је број присутних молова гаса, $R_u \approx 8,31\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ је универзална гасна константа, а T температура (у степенима Келвина). Ова формула је најјачи аргумент да се температура гаса у кретању не мења. Међутим, значајним порастом релативне брзине, гас губи својства идеалног (стиска се по дужини, расте маса молекула), па се у формулу идеалних гасова баш тада не можемо поуздати.

Зато овом проблему прилазимо са још једне стране. Вратимо се на пример са слике 1.10 и узмимо да релативни посматрач седи у соби B, а сопствени у соби A која се креће правцем x-осе, али притисак дефинишимо прецизније. У физици је притисак P дејство вектора силе $\mathbf{F}$ на површину П. „Окомита површина“ на правац кретања се не мења, „паралелна површина“ се скраћује пропорционално γ.

У случају силе интензитета F окомите на површину, имамо количник

$$P = F/\Pi, \tag{1.32}$$

а даље је важно како дефинишемо релативну силу. За силу као промену импулса у јединици времена, након краћег израчунавања добијамо (познати) израз

$$\frac{E}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma^2\mathbf{F}_{\|} + \mathbf{F}_{\perp}, \tag{1.33}$$

где је $\mathbf{F}_{\|}$ компонента дате силе паралелна вектору брзине $\mathbf{v}$ честице, а $\mathbf{F}_{\perp}$ окомита компонента. Ако је сила паралелна са брзинама молекула, ово убрзање је паралелно сили и имамо „паралелну инерцију“ $\gamma^2(E/c^2)$. Ако је сила окомита на брзине молекула, резултирајуће убрзање је паралелно сили, па имамо „окомиту инерцију“ (E/c^2). Примењено на површине собе, добијамо притиске:

$$P_{\|} = \gamma^2 P_0, \quad P_{\perp} = \gamma P_0. \tag{1.34}$$

Први притисак је лонгитудинални, други је трансферзални. Лонгитудинални притисак је у складу са нашом интерпретацијом температуре (1.16). Други, бочни притисак је у складу са нашом интерпретацијом Бернулијеве једначине (1.30) и са познатим Бојл-Мариотовим законом. То би могао бити преломни аргумент да даље не вреди држати страну (нетачној) савременој релативистичкој термодинамици.

Ако вам „чудни“ израз (1.33) не изгледа убедљиво сетите се да силе и инерцијална кретања не иду заједно, а затим погледајте следећи пример. Доказ тог „спорног“ израза користи релативистичку релацију $E = mc^2$, па и:

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}c}{E}, \quad E^2 - (\mathbf{p}c)^2 = \text{const.} \tag{1.35}$$

које узимамо за прихватљиве за дефиницију силе (у условима у којима се подразумева да нема дејства сила).

Пример 1.6.1. *Користећи (1.35) доказати (1.33).*

Доказ. Израчунавамо изводе (1.35) и редом даље:

$$\frac{d\mathbf{v}/c}{dt} = \frac{(d\mathbf{p}/dt)c}{E} - \frac{\mathbf{p}c}{E^2}\frac{dE}{dt}, \quad 2E\frac{dE}{dt} - 2\mathbf{p}c\cdot\frac{d\mathbf{p}c}{dt} = 0,$$

$$E\frac{dE}{dt} = \mathbf{p}c\cdot\frac{d\mathbf{p}c}{dt} = \mathbf{p}c^2\cdot\mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{v}/c}{dt} = \frac{\mathbf{F}c}{E} - \frac{\mathbf{p}c}{E^2}\frac{\mathbf{p}c^2\cdot\mathbf{F}}{E},$$

$$\frac{E}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{p}c}{E}\frac{\mathbf{p}c}{E}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{v}}{c}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{F}\right),$$

$$\frac{E}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{F}_{||} + \mathbf{F}_{\perp},$$

где је $\mathbf{F}_{||}$ компонента силе $\mathbf{F}$ паралелна са вектором брзине $\mathbf{v}$, а $\mathbf{F}_{\perp}$ је окомита компонента. То је тражени израз (1.33). □

Према овоме, производ лонгитудиналног притиска и запремине није константан. Он је за релативног посматрача већи пропорционално са γ, па се онда и десна страна једнакости (1.31) увећава пропорционално са релативистичким коефицијентом γ. То значи повећање релативне температуре, што је опет у складу са нашим претходним (хипо) тезама о смањењу релативне ентропије. Оно јесте у нескладу са званичном физиком (са релативистичком термодинамиком), али приметите да се тај део може и занемарити а да ова теорија о природи времена опет стоји. За разумевање настајања времена из информације и није потребно познавање ентропије.

Међутим, када прихватимо овакво третирање ентропије и последица, много тога из релативистичке термодинамике ће изгледати логичније или ће се појендноставити. Болцманова константа $k_B = R/N_A$ и даље дефинише количник гасне константе R_u и Авогадровове[35] константе $N_A = 6,02\times 10^{23}$ mol^{-1}. То и даље остаје у складу са познатом класичном формулом термодинамике, $PV = nRT = k_B NT$, где је n број молова супстанце, а N број молекула гаса. За $n = 1$ mol, број N је једнак броју честица у једном молу, тј. Авогадровом броју. Са друге стране, кинетичка теорија даје просечан притисак идеалног гаса $P = Nm\bar{v}^2/3V$, одакле просечна транслаторна кинетичка енергија $\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}k_B T$, а она има три степена слободе (по један $\frac{1}{2}k_B T$ за сваку димензију).

Познато је у физици, *енталпија* (H) је збир унутрашње енергије (E) и производа притиска (P) са запремином (V) термодинамичког система. Енталпија је особина термодинамичког система, независна од његове историје:

$$H = E + PV, \tag{1.36}$$

при чему је E унутрашња енергија система која се мења према (1.13), дакле једнако као и други сабирак (PV). Према томе је релативна енталпија

$$H = \gamma H_0, \tag{1.37}$$

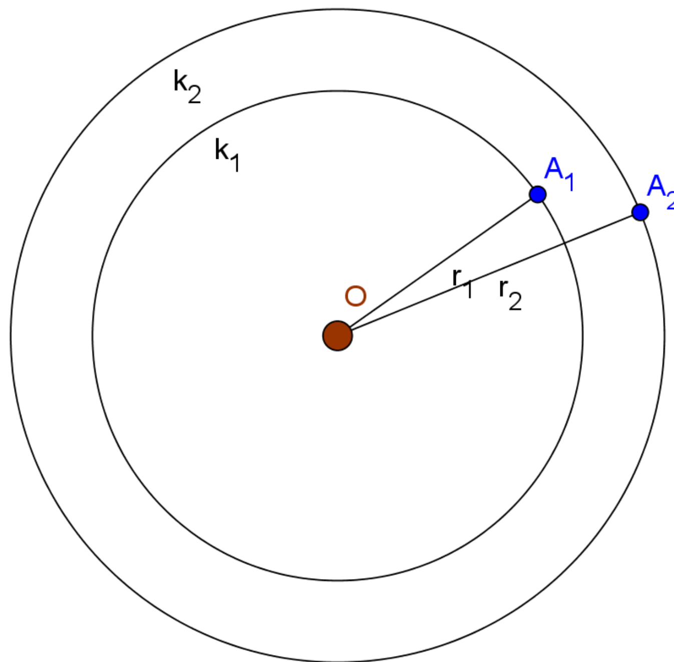
када је H_0 сопствена. Размене топлоте ΔQ_0 и енталпије ΔH_0 у систему у мировању једнаке су, али не и у кретању. Ово друго није званично.

[35]Амадео Авогадро (1776-1856), италијански научник.

1.7 Њутнова механика

Дошли смо до закључка да је промена сопствене ентропије ΔS_0 већа од одговарајуће релативне ΔS која опада зависно од релативне брзине v пропорционално броју $1/\gamma$. Зато што систем не прелази спонтано на стања мање ентропије, зато кажемо да тело остаје у сопственом систему и тако тумачимо деловање Њутновог[36] закона инерције. Разматраћемо сада те закључке у условима Њутнове гравитације.

У исходишту координатног система, у тачки O на слици 1.11, налази се центар планете масе M, око које ротирају два сателита A_1 и A_2 маса m_1 и m_2 на удаљеностима r_1 и r_2 по кружним[37] путањама k_1 и k_2. Одбојне центрифугалне силе које ствара ротација сателита у равнотежи су са привлачном силом гравитације и сателити клизе по својим кружницама не осећајући дејства тих сила. Они се налазе у бестежинском стању па према томе и у (криволинијском) инерцијалном кретању. Поставља се питање шта је са ентропијама сателита?



Slika 1.11: Ротација око центра масе.

На основу свега досадашњег изводимо закључак да је сопствена ентропија сваког од сателита већа од релативне ентропије оног другог. Такође, сопствена ентропија сателита већа је од ентропије непокретне тачке којом сателит пролази током своје ротације, јер би се иначе могао зауставити у тој тачки (без дејства других сила или судара). Зато сателит не може спонтано прећи из једне путање у другу, нити се може тако зауставити. Приметимо да ово не мора да важи у случају веома јаке гравитационе силе (великих маса, на мањим полупречницима ротације), када је упитна „инерцијалност“ бестежинског стања.

Пример 1.7.1. *Израчунати брзине сателита.*

[36] Isaac Newton (1642-1727), енглески математичар.

[37] Уместо кружница могли бисмо узети било које криве другог реда (елипсе, параболе или хиперболе) али би нам тада рачун био компликованији.

Решење. Центрифугална и гравитациона сила сателита масе m на удаљености r од центра масе M износе, редом:

$$F_c = \frac{mv^2}{r}, \quad F_g = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{1.38}$$

где је $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^2 гравитациона константа. Изједначавањем добијамо

$$v = \sqrt{GM/r}, \tag{1.39}$$

а затим r замењујемо са $r_1 < r_2$, и добијамо две различите брзине $v_1 > v_2$. Што је сателит даље креће се спорије, брзином обрнуто пропорционалном са $\sqrt{r}$. □

У условим слабог гравитационог поља (Њутновог поља), када слободан пад по кружној путањи сателита још увек можемо сматрати инерцијалним кретањем, брзина фиксне тачке којом сателит пролази расте са приближавањем центру гравитације, тада важе формуле за умањење релативне ентропије и успоравања времена (1.18) и (1.23). Такође, када полупречник ротације неограничено расте ($r \to \infty$), тада дејство гравитационог поља исчезава и брзина ротације постаје нула. Са становишта ових инерцијалних система види се брзина ротације (1.39) и могу се препознати разлике у релативним ентропијама непокретних тачака поља у односу на ентропије сателита. Ако смо у претходним разматрањима били у праву, ове разлике ентропија морају довести и до разлика брзина протицања времена.

Дакле, тумачећи настанак времена стварањем информације, ову реализацијом случајних догађаја из неизвесности, а затим и због ентропије, долазимо до закључка да Њутнова механика предвиђа успоравање времена унутар гравитације. Штавише, показаћемо да је то у складу са Ајнштајновом општом теоријом релативности!

Пример 1.7.2. *Израчунати промену ентропије и дилатацију времена фиксне тачке у гравитационом пољу, релативно у односу на фиксног бесконачно далеког посматрача.*

Решење. Брзина бесконачно удаљеног сателита је нула (када $r \to \infty$, тада $v_\infty \to 0$). Отуда се види брзина кретања сателита (1.39) и може се констатовати да су му одговарајуће промене ентропије и брзина протицања времена, редом:

$$\Delta S = \Delta S_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.40}$$

где са индексом нула и даље означавамо сопствене вредности. Релативно у односу на тај сателит, непокретне тачке којима сателит пролази имају такође успоравања ентропије и времена за исти коефицијент:

$$\Delta S_0 = \Delta S' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \Delta t_0 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.41}$$

а отуда композицијом функција и сменом (1.39):

$$\Delta S = \Delta S' \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right), \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{1 - \frac{GM}{c^2 r}}, \tag{1.42}$$

што ће се показати као добра апроксимација за Шварцшилдово[38] поље (централно симетрично гравитационо поље опште теорије релативности). □

[38] Karl Schwarzschild (1873-1916), немачки физичар и астроном.

Карл Шварцшилд је 1916. године показао да се из опште теорије релативности апроксимацијом добија класична теорија гравитације, а сада имамо и обрнути поступак, извођење последица Ајнштајнове опште теорије из класичне Њутнове. Међутим, није моје тумачење ентропије неопходно за такво поопштавање. Довољна су специјална теорија релативности и класична механика.

Полазећи од Њутновог закона, држимо центар масе M и даље у исходишту, а тело масе m нека је у слободном паду, рецимо (може и дугачије) вертикално ка том центру. Падање тела масе m производи рад (гравитационе силе тела M) који се претвара у кинетичку енергију па маса m расте. Према Галилејевом[39] принципу еквиваленције инерционе и гравитационе масе, порастом масе расте и јачина гравитационе силе. Нека на путу dr маса порасте за dm. Тада имамо:

$$dmc^2 = -\frac{GMm}{r^2}dr,$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{GM}{r^2c^2}dr,$$

$$\ln m = \frac{GM}{rc^2} + \text{const.}$$

$$m = m_0 e^{GM/rc^2}, \tag{1.43}$$

где би маса тела које пада била m_0 у одсуству гравитације.

Осврнимо се на развој у Маклоренов ред функција које се овде јављају:

$$\begin{cases} (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ (1-x)^{0,5} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \dots \\ (1-x)^{-0,5} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots \\ \exp(x) = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots \end{cases} \tag{1.44}$$

За мале брзине у односу на брзину светлости, када $x = v/c \to 0$, добијамо:

$$\begin{cases} (1-x)^{-1} \approx 1 + x \\ (1-x)^{0,5} \approx 1 - \frac{1}{2}x \\ (1-x)^{-0,5} \approx 1 + \frac{1}{2}x \\ \exp(x) \approx 1 + x \\ \ln(1-x) \approx -x \end{cases} \tag{1.45}$$

Тако видимо да је коефицијент дилатације времена (1.42) једнак са коефицијентом повећања масе (1.43). Даље ћемо (са истом апроксимацијом) показати да светлост која улази у гравитационо поље мења фреквенцију једнако као што време у гравитационом пољу успорава због смањивања ентропије.

Једначина (1.43) важи за гравитациона поља где је маса M довољно већа од m (убрзање већег тела је занемариво у односу на убрзање мањег), када је центар маса у центру већег тела а да још увек можемо имати инерцијалне системе. Маса фотона је $\hbar\omega/c^2$, фреквенција светлости у бесконачности је ω_0. Док светлост путује у гравитационом пољу[40], према једначини (1.43), њена фреквенција је $\omega = \omega_0 e^{GM/rc^2}$. Обрнуто,

[39] Galileo Galilei (1564-1642), италијански математичар.

[40] в. [2]

ставимо ли да је фреквенција светлости ω' на површини звезде полупречника R, онда ће она удаљавајући се од звезде постати фреквенција

$$\omega = \omega' e^{-GM/Rc^2} \approx \omega'(1 - \frac{GM}{Rc^2}). \tag{1.46}$$

То је позната формула за гравитациони *црвени помак*. Раније смо већ помињали тај „помак ка црвеном" изван гравитационог поља, (1.16) и даље, као индикатор повећања температуре у контексту смањења ентропије. Аналогно овде, у гравитационом пољу, он указује на нижу ентропију на површини звезде него на даљим местима.

Унутар гравитационог поља не можемо синхронизовати сатове као у специјалној релативности, али можемо у бесконачности. Низ осцилација таласа светлости простире се из бесконачности до r од центра, са почетном фреквенцијом ω_0 и трајањем једне осцилације $\Delta t = 2\pi/\omega_0$. Мерено сатом у гравитационом пољу, протекло време такође је Δt, јер су одлагања потребна за две фазе таласа једнака.

Међутим, гравитација делује на фреквенцију светлости. То се види из претходног, да се локална фреквенција светлости мења у односу на бесконачност. Са удаљеног инерцијаног система гледано, локална фреквенција постаје $\omega_0 \cdot e^{GM/rc^2}$, а локално трајање једне фазе таласа $\Delta t \cdot e^{-GM/rc^2}$. Како временски интервал мерен локално износи Δt, то локални сат успорава у односу на сат у бесконачности. Да бисмо добили време у бесконачности морамо множити локално време са фактором e^{-GM/kc^2}.

Слично дилатацији времена, помоћу фреквенција светлости можемо израчунати и контракцију дужина у присуству гравитационог поља. Нека је таласна дужина светлости у бесконачности λ_0 а растојање које она пређе за јединично време $n\lambda_0$. Док се приближава удаљености r, она још увек прави n осцилација у јединици времена. Како се локална фреквенција повећава, локална таласна дужина постаје $\lambda_0 e^{-GM/rc^2}$ посматрана из бесконачности, а растојање које талас пређе за јединицу времена постаје $n\lambda_0 e^{-GM/rc^2}$. Дужина је растојање које светлост пређе за дато време. Упоређена са дужином у бесконачности, локална дужина се скраћује. Дакле, да би је свели на дужину у бесконачности, локалну дужину (у правцу извора поља) морамо множити са фактором e^{GM/rc^2}.

Другим ознакама, ако су за посматрача у гравитационом пољу дужина (у правцу промене јачине поља) и време Δr_0 и Δt_0, исте ће посматрач изван гравитационог поља вредновати са Δr и Δt, при чему је:

$$\Delta r = \Delta r_0 \exp\left(-\frac{GM}{rc^2}\right), \quad \Delta t = \Delta t_0 \exp\left(\frac{GM}{rc^2}\right). \tag{1.47}$$

То су изрази за контракцију дужина (у правцу гравитационог поља) и дилатацију времена познати и у општој теорији релативности у случају слабијих поља (мало M или велико r). Апроксимацијом (1.45) их сводимо на:

$$\Delta r = \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)\Delta r_0, \quad \Delta t = \left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right)\Delta t_0. \tag{1.48}$$

Може се показати да се исти изрази добијају и из Шварцшилдове метрике

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2, \tag{1.49}$$

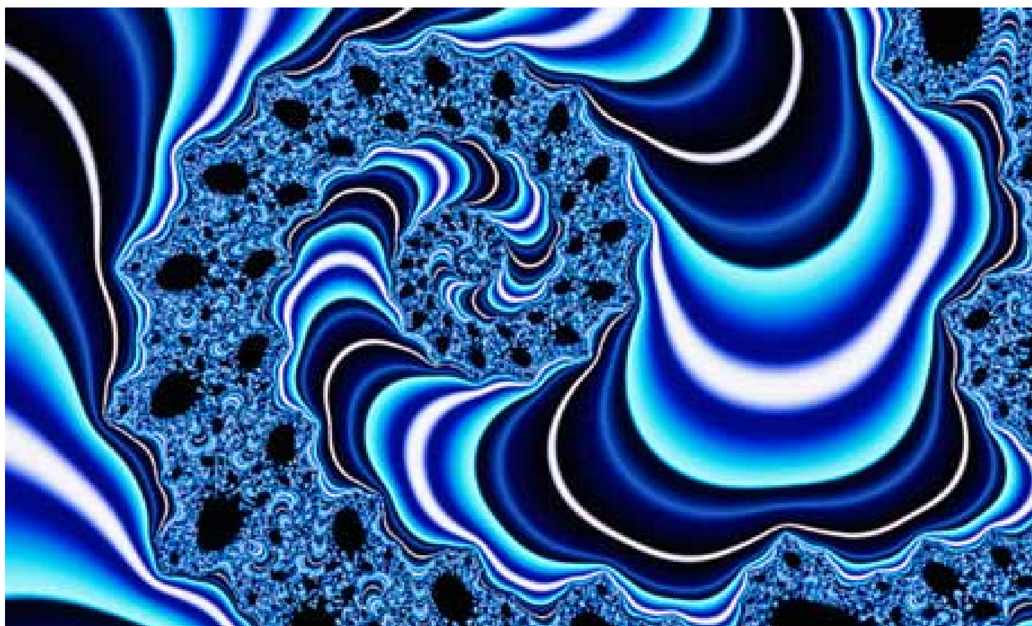
која представља решење Ајнштајнових једначина поља (опште теорије релативности), у сферним координатама $Or\varphi\theta$ за централно симетрично гравитационо поље.

Надам се да ова израчунавања и објашњења довољно добро сведоче о сагласности мојих хипотеза са признатом физиком механике.

1.8 Случајност и хаос

Рекли смо да је у самој основи васионе случајност и хаос, а сада ћемо то двоје раздвојити и прецизирати у одсуство крајњег узрока и непредвидљивост. Пре тога, нагласимо да је васиона много више од онога каквом је види данашња физика, али да опет и она има своја ограничења. Једно од тих ограничења је *закон великих бројева*: „понављањем у истим условима, фреквенција случајног исхода постаје све више једнака вероватноћи тог исхода”. На пример, у 18. и 19. веку примећено је да је на великом узорку однос мушких и женских новорођенчади константан. При томе, број дневно рођене мушке и женске деце није уједначен, већ се тек у дужем посматрању тај однос почиње стабилизовати. Због закона великих бројева све веће ствари у васиони од сасвим случајних постају сасвим неслучајне.

Горња граница васионе када случајности прелазе у извесности (можда хоризонт догађаја) одређена је оним најмањим корацима (можда квантима нужности) на местима за која верујемо да немају извесности. Ова разматрања су ближе том дну.



Slika 1.12: Хаос - ред сакривен нередом.

Теорија хаоса је грана математике која се бави понашањем динамичких система који су веома осетљиви на почетне услове. У оквиру тога се „хаос“ сматра нечим што изгледа насумично али оно то по својој суштини није, јер се негде унутар крију правила, повратне петље, понављања, само-сличности, фрактали и само-организовање, које малим променама почетних вредности доводе до великих разлика у крајњим резултатима. У том смислу је написана[41] данас чувена реченица о *ефекту лептира*, да покрет његових крила у Бразилу може бити узрок торнада у Тексасу. Пионир ове теорије Едвард Лоренц[42] је дефинисао хаос[43] следећом реченицом: „Хаос имате када

[41] Boeing (2015). “Chaos Theory and the Logistic Map”. Retrieved 2015-07-16.
[42] Edward Norton Lorenz (1917-2008), амерички математичар.
[43] Danforth, Christopher M. (April 2013). “Chaos in an Atmosphere Hanging on a Wall”. Mathematics of Planet Earth 2013. Retrieved 4 April 2013.

садашњост одређује будућност, али приближна садашњост не одређује приближну будућност". Према томе, теорија хаоса није тачна основа ове књиге.

Међутим, многа истраживања на која се наслања теорија хаоса довела су до резултата који би нам овде могли бити корисни. На пример, *Ремзијева теорема*, парафразирам[44]: увек је могуће наћи неки клише ма како се трудили да ствари замутимо. Тако, ако довољно много насумичних облака прође небом, увек ће бити могуће у њима угледати неко унапред дато лице. Генеришући само насумичне речи у некој књизи, када књига постане довољно опширна, у њој ћете налазити и смислене реченице. Зато што се у мноштву случајности увек налазе елементи нужности, нећемо направити логичку грешку па поверовати да је сва случајност саткана само од нужности.

Ремзијева теорема је настала пре теорије хаоса. Она је била део *комбинаторике* (теорије распоређивања) и последица Дирихлетовог[45] принципа (ако имате $n = 1, 2, 3, \dots$ отвора за голубове и $n + 1$ голубова, онда ће бар у једном од отвора бити бар два голуба), а данас је честа тема на такмичењима ученика из математике. Међутим, као што сама комбинаторика све више изгледа као део теорије вероватноће, верујем, тако ће и Ремзијева теорема постајати део квантне механике.

Примењено на формулу (1.3), која повезује хијерархију, интелигенсију и слободу живих бића, из Ремзијеве теореме можемо извести закључак да не постоји хијерархија (нити интелигенција) интензитета нула. Примењено на формулу (1.4) у случају када она представља информацију (а то значи и принцип најмањег дејства у физици, а затим и лагранжијан), вектори $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ не могу бити нултих интензитета (морају заступати макар мале неодређености). У случају да угао између тих вектора није прав, онда нити њихов скаларни производ L не може бити нула. Тада свака примена принципа најмањег дејства у физици мора резултирати неком информацијом. Напротив, нарушавање принципа најмањег дејства можемо тражити само међу интеракцијама без размене информације (квантна спрегнутост).

Друга група занимљивих примера долази нам из проучавања цикличних појава. Теорија хаоса је настала отркивањем стабилности (еквилибријума) у нестабилности. Врсте стабилности, такви скупови вредности ка којима системи теже да еволуирају са широког спектра почетних услова, називају се *атрактори*. Грубо, постоје две врсте равнотежа, статичне и динамичне. Када се систем развија у такве, прве називамо атракторима, а друге страним атракторима.

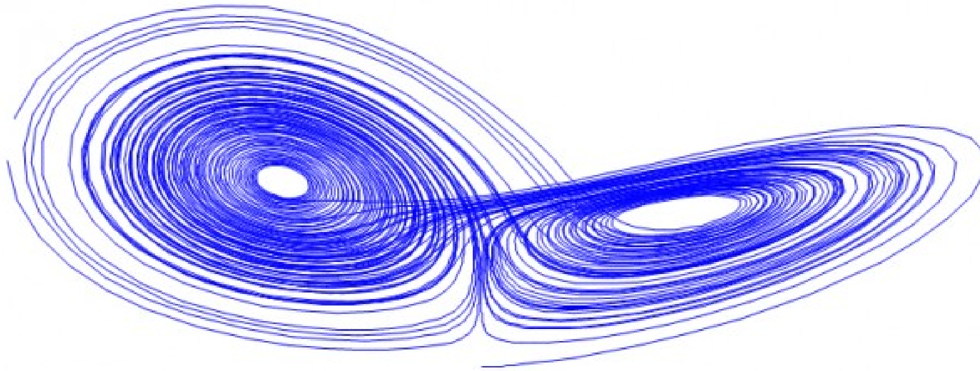
На пример, замислимо неки градић са 10 000 становника. За смештај свих тих житеља у граду су једна робна кућа, вртић, школа, библиотека и три богомоље. Та им је инфраструктура довољна и људи живе у равнотежи. Међутим, нека компанија одлучи да на предграђу отвори фабрику која би могла да запосли још 10 000 људи и да нагло развије град за смештај 20 000 становника. Зато се ради на отварању још једне робне куће, још по једног вртића, школе и библиотеке и још три богомоље. Инвеститори циљају на нову равнотежу коју називамо атрактор.

Замислимо даље да уместо доласка нових 10 000 људи на постојећих 10 000, град напусти 3 000 и у њему остане само 7 000. Шефови продаје из робне куће процене да њихове продавнице могу опстати само са 8 000 муштерија, па их крену затварати. У међувремену потражња порасте и нека друга компанија одлучи да изгради супермаркет, надајући се да ће тако привући нове људе. А то се и деси. Али многи су већ у процесу одсељавања и нови супермаркет неће променити њихове намере. Компанија

[44]Ramsey's theorem: https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey%27s_theorem

[45]Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), немачки математичар.

држи радње отворенима још годину дана а затим дође до закључка да нема довољно купаца и поново их затвори. Људи одсељавају, али потражња опет расте. Неко трећи отвори трговачки центар. Људи се почну враћати али не довољно. Радње се поново затварају. Процес отварања и затварања тече и даље, чиме сам процес постаје неко стање динамичке равнотеже коју називамо страни атрактор[46] (в. слику 1.13).



Slika 1.13: Страни атрактор.

Разлика између обичног и страног атрактора је што први представља стање у које се систем коначно смешта, а други представља врсту путање којом систем иде од ситуације до ситуације без коначног смиривања. *Поенкаре-Бендиксонова теорема*[47] каже да да *страни атрактор* може постојати само у системима са три или више димензија, или у две димензије ако простор није еуклидски.

Зато што простор има три димензије (дужину, ширину, висину) физички системи могу тежити и динамичким равнотежама. Тамо где се формирају дводимензионално они постају статични. На пример, еволуција живота на Земљи може бити у динамичкој равнотежи, као и развој саме васионе. Пахуљице снега се развијају у статичне 2-дим кристале. Врста атрактора су и таласи материје квантне механике.

Када велики број честица формира шару која је скоро једнака почетним опцијама појединe честице, тада говоримо о *само-сличности*. Она такође може бити статична (попут пахуљице) или динамична (попут атома), изражена у понављању облика или понашања на различитим нивоима сложености. Не као идентичка копија, већ као варијација исте основе. То су открића теорије хаоса која можемо следити, иако нећемо и саму претпоставку да и у највећем нереду све има свој узрок.

Наиме, чак и када су основе теорије нетачне последице могу бити тачне, јер $\bot \Rightarrow \top$ није контрадикција. Реалност је нејасна али је апроксимација тачна. Са друге стране, $\top \Rightarrow \bot$ јесте контрадикција (нетачност се не може извести дедукцијом из тачног), па је „апсолутна истина“ непоуздан сарадник. Узрок свих узрока не оправдава нити Белова теорема (да квантна механика нема скривених параметара), непостојање „скупа свих скупова“, па и немогућност досезања граница знања (Геделова теорема). Не само да нам је крајњи узрок недоступан, већ је такав и контрадикторан, а то је за математичку теорију неприхватљиво.

---

[46] енг. strange attractor - чудни атрактор, мамац

[47] Poincaré–Bendixson theorem: https://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9%E2%80%93Bendixson_theorem

1.9 Таласи материје

Таласи материје су централни део квантне механике. Они су произашли из особина квантних система да су истовремено и таласи и честице. Мали делови материје имају и таласне и квантне особине, што се назива дуализмом *талас-честица*. На пример, електрони показују особине *дифракције*, груписања по слабијим и јачим концентричним кружницама, када наиђу на препреку или морају проћи кроз отвор. Таласи електрона су заправо таласи вероватноће који стварају нове и нове позиције електрона (чији делови маса, наелектрисање или спин се не могу даље делити) док време одмиче, држећи се принципа да ће једном реализована честица у датом тренутку бити опет највероватнија у истим околностима и у следећем тренутку. Као атрактори, таласи вероватноће се могу апроксимирати синусоидама.

На слици 1.14 приказан је једноставан талас, представљен синусоидом $y = a \sin bx$. Талас осцилује око апсцисе (x-осе) са максималним одступањима у правцу ординате (y-оса) константним *амплитудама* (a), које се ($a, b = \text{const.}$) периодично понављају. Растојање између две суседне истосмерне амплитуде назива се *таласном дужином* ($\lambda = 2\pi/b$) или *основним периодом* таласа.

Slika 1.14: Једноставан талас.

Зато што су параметри a и b дате синусоиде константе, талас изгледа равномерно као на слици. Ако се параметри мењају дуж апсцисе, $a = a(x)$ и $b = b(x)$, синусоида је *стационарна* али није обавезно равномерна. Уопште, стационарним стањем називамо оно које се не мења временом. Када се параметри таласа мењају и временом, али тако да амплитуде осцилују из горњег у доњи смер ординате не мењајући место на апсциси, тада имамо *стојеће таласе*. Непокретне тачке на оси таквих таласа називамо *чворовима таласа*. Коначно, гомила таласа на једном месту које може да се креће (не мора) назива се *таласни пакет*.

Фаза таласа је позиција тачке таласа у датом тренутку током његовог периодичног кретања временом. За врх амплитуде стојећег таласа кажемо да се помера паралелно ординати (горе-доле), док се код таласа у покрету помера паралелно апсциси (лево-десно). Рецимо, када се синусоида на датој слици помери за дужину $-\alpha$ паралелно апсциси, тада се добије нова синусоида:

$$y \to y_1 = a \sin[(x + \alpha)b] = a \sin(xb + \varphi), \tag{1.50}$$

па кажемо да фазни помак износи $\varphi = \alpha b$. Фазни помак се може мењати временом и

тада пишемо $\varphi = \varphi(t)$, када је фазна брзина $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$. То је брзина простирања таласа (апсцисом на слици 1.14).

У динамици флуида дисперзија (расипање) водених таласа се уопште односи на расипање фреквенције, што значи да таласи различитих таласних дужина путују различитим фазним брзинама. Вода са својом слободном површином у том смислу спада у дисперзивне медије, а водени таласи који се простиру површином воде су покретани површинском напетошћу и гравитацијом. Важност гравитације за кретање таласа воде сада, након претходног разматрања, значи да дубље узроке таласног кретања воде треба тражити у принципима вероватноће и ентропије.

Код трансферзалних (окомитих) таласа попут водених, вредност ординате буквално значи износ отклона таласа од правца његовог простирања дуж апсцисе. Код лонгитудиналних (уздужних) таласа попут звучних, вредност ординате је мера стискања медија дуж правца кретања таласа. Водене таласе покрећу, назовимо их *импресије* и *депресије*, а звучне тзв. *компресије* и *рарефракције*. Компресије су области високог притиска, рарефракције су области ниског. Аналогно поменутој гравитацији, из (1.34) знамо да и притисак има везе са ентропијом.

Прикривени ефекти неизвесности макро-света су израженији у микро-свету. Према Борну[48], квантна механика ради са вероватноћама физичких стања. Квантни систем и његова стања представљамо таласним функцијама $\Psi(\mathbf{r}, t)$, векторима Еуклидског простора, али са комплексним коефицијентима који зато називамо Хилбертов простор. Ове „гранчице" називамо *таласне функције*, јер се сабирају попут интерференције односно суперпозиције таласа. Оне представљају особине честица вероватноћама које се добијају као коњуговано комплексни производи $\Psi^*\Psi = |\Psi|^2$. Зато су оне и таласи вероватноће. Неизвесности тих вероватноћа сматрамо објективнима.

Реализацијама случајних догађаја настају информације (1.1), а њихово мноштво чини нашу садашњост. Садашњост затим постаје наша прошлост која се (углавном) не мења просто зато што (углавном) важи и закон одржања информације. Тај закон одржања је такође последица закона вероватноће. Поновимо, то видимо овако: сложена неизвесност (информација) са mn исхода може се разложити на збир неизвесности (информација) са m и n исхода, небитно у којим временским интервалима. На нивоу физике закон одржања информације се одавно прећутно прихвата, од када се верује да су сазнања добијена у интеракцијама у експериментима валидна.

Следи неколико примера рачунања помоћу ових функција да се види да су оне таласи, нама најважнији таласи, али и да видите како се са тим таласним функцијама рукује у квантној механици. Ове делове можете и прескочити.

Пример 1.9.1. *Показати да за $\xi \in \{x, y, z, t\}$ једначина*

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi}\Psi + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0, \tag{1.51}$$

значи одржање информације стања $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$ променом координате ξ.

Решење. Количина неизвесности се неће променити ако и само ако вероватноћа неће променити вредност. Отуда и због

$$\frac{\partial}{\partial \xi}|\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial \xi}(\Psi^*\Psi) = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi}\Psi + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$$

[48] Max Born (1882-1970), немачки физичар и математичар.

затим из

$$\frac{\partial}{\partial \xi}|\Psi|^2 = 0$$

следи тражена једнакост. То је једначина одржања неизвесности, која је еквивалентна информацији (након реализације случајног догађаја). □

Веома важна у квантној механици је Диракова[49] једначина, сведена на апсцису

$$\left[\beta mc^2 + c\left(\sum_{n=1}^{3}\alpha_n p_n\right)\right]\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}, \tag{1.52}$$

иначе инваријантна на Лоренцове трансформације. Физичка стања (честице) које она описује понашају се по правилима Ајнштајнове специјалне теорије релативности, за које смо рекли да изражава самодовољне, детерминистичке системе који се могу сместити у 4-димензионално простор-време Минковског. Из претходних разматрања то значи одржање ентропије, па нас неће изненадити ако откријемо да свако решење ове једначине одржава вероватноћу и информацију константним. Другим речима, за свако решење $\Psi = \Psi(x,t)$ Диракове једначине важиће једначина (1.51).

Пример 1.9.2. *Показати да свако решење Диракове једначине чува информацију.*

Решење. Из (1.51) следи, редом:

$$\left[\beta mc^2 + c\left(\sum_{n=1}^{3}\alpha_n p_n\right)\right]\Psi\Psi^* = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Psi^*,$$

$$-\left[\beta mc^2 + c\left(\sum_{n=1}^{3}\alpha_n p_n\right)\right]\Psi^*\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi,$$

а отуда сабирањем

$$0 = i\hbar\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Psi^* + \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi\right),$$

одакле тражени услов (1.51). □

Решења која не обухвата Диракова једначина налазе се у Шредингеровој[50] једначини, коју такође можемо написати у облику за апсцису и време

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{1.53}$$

где је таласна функција $\Psi = \Psi(x,t)$. Први сабирак је кинетичка енергија, други је потенцијална енергија, а на десној страни једнакости је укупна енергија. Маса честице је m, потенцијал $U(x,t)$ а $i = \sqrt{-1}$ је имагинарна јединица. Према томе, овако написана Шредингерова једначина изражава закон одржања енергије.

Једноставнија решења ове једначине добијамо када нема промена стања временом $\psi = \psi(x)$ и када је потенцијал функција само апсцисе $U = U(x)$. У најједноставнијем случају, за слободну честицу-талас, добијамо решење:

$$\psi(x) = Ae^{ikx}, \quad \frac{\hbar}{2m}k^2 = E, \quad p = \hbar k. \tag{1.54}$$

[49] Paul Dirac (1902-1984), енглески математичар.
[50] Erwin Schrödinger (1887-1961), аустријски физичар.

где је A реална константа, p импулс честице, k (реалан) таласни број, E енергија честице, $\hbar = h/2\pi$, $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js је Планкова константа. То је стационарно стање. Да за слободну честицу важи закон одржања информације (1.51) следи из следећег израчунавања:

$$\psi^*(x) = Ae^{-ikx}, \quad \psi(x) = Ae^{ikx},$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = -ik\psi^*, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\psi,$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\psi = -ik\psi^*\psi, \quad \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\psi^*\psi,$$

$$\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\psi = 0,$$

Према томе, важи једнакост (1.51). Међутим, информација није исто што и енергија, па можемо очекивати да нека решења Шредингерове једначине (1.53) не испуњавају услов одржања информације.

И заиста, за честицу у побуђеном стању, када $A = A(x)$ више није константа, сличним поступком налазимо

$$\frac{d\psi^*}{dx}\psi + \psi^*\frac{d\psi}{dx} = 2A\frac{dA}{dx} \ne 0, \tag{1.55}$$

када је извод $\frac{dA(x)}{dx} \ne 0$. Упоређујући са претходним, сада можемо потврдити да су овакве честице у неинерцијалним системима.

Када поопштимо Хартлијеву дефиницију (1.1) и таласну функцију напишемо у облику $\Psi = \exp(L)$, тада је L поопштена информација и комплексан број. Из (1.51) следи $\Psi^*\Psi\partial_\xi L + \Psi\Psi^*\partial_\xi L = 0$, односно $\partial_\xi(L^* + L) = 0$, што значи да из очувања вероватноће (у датим условима) следи очување само реалног дела те информације (без имагинарног). Међутим, имагинарни део чини функцију $\Psi = \ln L$ периодичном.

Ове делове сте могли и прескочити. Оно што бих волео да не прескочите јесте следеће запажање. Стационарна стања (1.54) представљају таласе вероватноће, нормиране тако да укупна површина испод (квадрата норме) ове функције до x-осе износи један. Зато је за стационарна стања равномерних таласа битно одакле су кренули (догађај D_1) и докле су стигли (догађај D_2). И то има своје чудне последице.

Нека је фотон та равномерна „слободна” честица која путује од интеракције D_1 до D_2. Зато што је овај свет (васиона) заснована на неизвесности, да „ма како нешто организовали увек се нешто може изјаловити”, зато након напуштања догађаја D_1 наш фотон не може бити баш сигуран у сусрет са догађајем D_2. Ако се догађај D_2 никада не деси, амплитуде вероватноће његове таласне функције ће се толико развући до чињенице да фотон никада није нити постојао, да се догађај D_1 у његовој историји никада и није десио. Напротив, ако се фотон срео са догађајем D_2, тада ће се његова прошлост формирати на такав начин да се десио и догађај D_1. Оба догађаја, D_1 и D_2, биће физички реална рецимо према отклону честица са којима је дати фотон реаговао одређеним законом одржања импулса.

Према томе, у овој теорији је потребно да верујемо у тзв. *квантну спрегнутост*. Не само у оно „фантомско деловање на даљину” коме се противио Ајнштајн, већ и у деловање садашњости на прошлост. Прошлост је депонија информација и она је трајна само толико колико важи закон одржања информације!

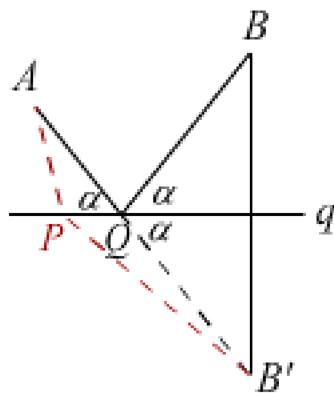
1.10 Интеракције

Физичке интеракције могу бити праћене емитовањем информације, али и не морају. Ово друго званична физика тек треба да открије, рецимо, у квантној спрегнутости или нама недоступним комуникацијама (што није исто). Обрнуто, свака информација праћена је неком интеракцијом.

Иако то на први поглед може изгледати другачије, све физичке интеракције долазе из случајних догађаја. Наиме, информација је реализована неизвесност и као таква она се даље не мења. Чак и када нам је потребно неко време да из датих података изведемо закључке, рачунаром или дедукцијом, оно што добијемо није информација све док у изведби не учествује непредвидљивост. Теорема изведена из аксиома и њихових последица неке математичке теорије, има нулту информацију. То је последица Хартлијеве дефиниције информације, која је основа осталих.

Узрок закона вероватноће је принцип вероватноће (оно што је вероватније догађа се чешће), који сматрамо толико „логичним” да га и не налазимо у књигама које излажу теорију вероватноће. Физикална последица тог принципа је да природа мора да реализује (највероватније) неизвесности и да уједно производи минимум информације. Због ове нужности и уједно шкртости у давању информације, у физици имамо „принцип најмањег дејства“, свугде где је интеракција праћена информацијом.

Пример 1.10.1. *Због принципа најмањег дејства, светлост се одбија под углом једнаким упадном.*



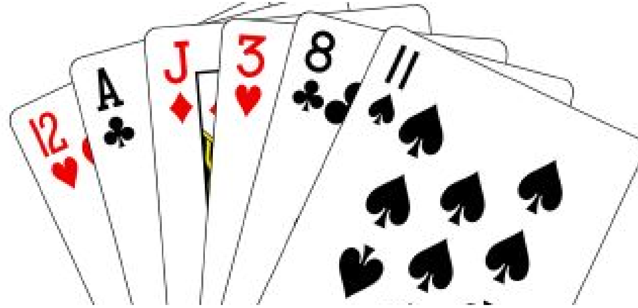
Slika 1.15: Из A светлост се одбија од q ка B.

Објашњење. На слици 1.15, светлост из тачке A одбијајући се у тачки Q површине q стиже у тачку B. Међутим, $Q \in q$ обезбеђује најкраћи пут од A одбијањем до B.

Наиме, B' је рефлексија B преко q, па је $A - Q - B'$ и $\overline{QB} = \overline{QB'}$, а унакрсни углови и рефлектовани су једнаки α. Из неједнакости троугла APB', где је $P \in q$ произвољна, да је свака страница троугла (посебно $AB' = \overline{AQ} + \overline{QB'} = \overline{AQ} + \overline{QB}$) краћа од збира остале две, следи закључак. □

Због принципа најмањег дејства, садашњост напредује најмањим могућим корацима. Она представља укупност управо реализоване неизвесности у информацију и ништа више. У тим информацијама је садржана и сва геометрија чији део видимо у датом

примеру, али и сва остала реалност. Према томе, физички део света није сама супстанца, већ и математичка апстракција која објашњава ту супстанцу.



Slika 1.16: Играће карте.

Да и својство адитивности (сабирања предмета, маса, енергија) супстанце има корен или узор у аналогном својству информације видимо из следећег примера. Немачки шпил има 52 карте. Свака је карта са по једном од 13 вредности (2, 3, ..., 10, жандар, дама, краљ, ас) и једном од четири боје (пик, треф, каро, херц). Вероватноћа насумице извучене карте и добијене информације је редом:

$$P = \frac{1}{52} \approx 0,019 \quad H = \ln 52 \approx 3,951. \tag{1.56}$$

Претпоставимо да је суиграч тако извукао једну карту коју требамо погађати, али да пре тога он нама може открити: или 1. њену вредност или 2. њену боју. Информације о првом и другом су редом:

$$H_1 = \ln 13 \approx 2,565 \quad H_2 = \ln 4 \approx 1,386. \tag{1.57}$$

Јасно је да ће нам њена вредност бити кориснија него њена боја, а опет је

$$H_1 + H_2 = H. \tag{1.58}$$

Када тражи изјашњење у информацији природа радије бира онај први случај. Такав избор је последица принципа ентропије.

Да су вероватноће релативне, зависно од опажене брзине координатног система, видимо на слици 1.8. Систем K' се креће брзином v у односу на K дуж r-осе. У покретном систему, окомито на правац кретања, креће се зрака светлости. Иста зрака опажена у систему K не креће се окомито на r-осу. Сопствени и релативни импулс зраке светлости су различити, а како се у односу на сваког од посматрача реализују највероватнији догађаји (принцип вероватноће), то највероватнија путања у K' није највероватнија и за K.

За релативног и сопственог посматрача брзина светлости остаје иста, а иста је и појединa информација. Ово друго је новост па морам објаснити. Када из лото бубња извлачимо једну од, рецимо 39 фер куглица, вероватноћа (1/39) се не мења ако сутрадан све куглице заменимо већима. Можда ће се само продужити трајање извлачења или ће нам требати већа кутија за смештај добитне комбинације. Тако некако разумемо релативне посматраче. Када би се вероватноће случајних догађаја за релативног посматрача смањиле и ти исти догађаји реализовали, онда би такав добио већу информацију. За оба, релативног и сопственог посматрача, реализују се највероватнији догађаји (не обавезно исти), али се смањује укупна количина свих.

То нас води до идеје да постоји нека врста кванта информације. На пример, Хајзенбергове[51] *релације неодређености* за импулс Δp_r и положај Δr мерено дуж исте осе (апсцисе, ординате, апликате, или временске ct када је $p_{ct} = E/c$ четврта компонента импулса), гласе

$$\Delta p_r \Delta r \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{1.59}$$

где је $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ редукована Планкова константа. Најмања вредност леве стране неједнакости је *квант информације* који је исти за оба, релативног и сопственог посматрача. Од таквих сабирака се састоји L, тј. генералисана информација (1.4) и, претпостављам, лагранжијан $\mathcal{L}$.

Разматрањима о термодинамици у претходним секцијама (Ентропија - Притисак) постављена је претпоставка да је релативна ентропија мања од сопствене. То сада може значити само смањење броја најоптималнијих распоређивања (1.11) у складу са формулом (1.18). Можемо рећи овако: зато што време успорава смањује се број распореда по јединици времена, а зато се смањује и вредност логаритма који значи Болцманову ентропију. Међутим, исто можемо рећи и овако: зато што се смањује ентропија и укупна количина произведене информације, зато је мања производња времена и садашњост је успорена. То је сагласност.

То није нпр. „квака 22“, која значи блокаду рада програма када један процес чека на завршетак другог а други чека да се заврши први, али био би „circulus vitiosus“ када би се користило као дефиниција или доказ за тезу о успоравању релативног времена или мањој релативној информацији (ово друго је овде хипотеза).

Природа (углавном) трага за плановима са највећим бројем распореда и када их реализује дели около порције са најмањом информацијом а затим редом све већом. Са друге стране, шкртарећи се информацијама у контактима са околином, предмети комуницирају, одржавајући своје вероватноће а тиме и неизвесности константним. Преузимајући информације из околине честице одржавају сопствена стања. Ове ситуације још више поједностављује претпоставка да је природа „глупа“, да честице „не памте“, да не „трагају за плановима“ већ „одлуке“ доносе на пречац, фудбалским жаргоном „на прву лопту“, и добићемо физику микро-света.

Када се честица изнова (у следећем тренутку) формира и реагује на сличан начин то је изнуђена реакција на околности које се нису (битно) промениле. Познато је да узастопна мерења неке особине квантне честице дају (углавном) исте вредност вероватноће те особине. Доследно томе (а није познато, јер следи из овде описаног описа ентропије) је да одбијања честица у сударима настају због размене информација. Приближавајући се судару, свака од честица предаје другој неку информацију о себи, појашњавајући се, чинећи јој своје окружење извеснијим и управо зато и са мањом ентропијом. Ствара извеснију средину, мање интересантну честицама и са мањом ентропијом, због чега се честице одбијају. Спонтано, свака од честица не желећи ићи напред, скреће.

Уопште гледајући, не комуницира свако са сваким. У физици, изузетак од тога је можда гравитација, али верујем да електромагнетне појаве нису. Иако без набоја, фотони су честице електромагнетног зрачења које комуницирају (само) са електрички набијеним честицама попут електрона, протона, позитрона, миона, W-бозона, и других. Око тих набоја ствара се подручје виртуелних фотона које називамо *електромагнетним пољем*. *Виртуелна честица* је једнака одговарајућој реалној али тек када (ако) се

[51]Werner Heisenberg 1901-1976), немачки теоријски физичак.

саставе обе интеракције: одлазак од једне и долазак до друге интеракције. Тек тада на крајевима интеракција прораде закони одржања и честица постане реална.

Процес таквих интеракција описују познати Фејманови[52] дијаграми, али оно чега у описима Фејманових дијаграма[53] нема и овде наглашавамо је *квантна спрегнутост* и *промена ентропије* у простору између наелектрисаних честица. Те две појаве су једна од поенти ових хипотеза. Пад ентропије у сударима честица настаје смањењем неизвесности у простору између, због комуникације честица.

На описани начин објашњавамо одбијање негативно наелектрисаних електрона. Али шта је са привлачењем позитивног и негативног наелектрисања? Држећи се изворног Фејмановог објашњења (данас одбаченог) рећи ћемо да позитивно наелектрисани позитрони имају супротан ток времена од негативних електрона. Исти претходни опис, судар позитрона и електрона, тада резултира привлачењем уместо одбијања.

Данас се у физици сматра да о супротном току времена (позитрона у односу на електроне) не вреди разговарати зато што би један видео спонтани раст ентропије у свету, због чега би други видео пад ентропије, што је противно другим законом термодинамике. Чаша која падне са стола и разбије се у складу је са спонтаним растом ентропије, филм тог пада и разбијања, када бисмо га пуштали уназад, приказао би догађај који то не би био. Међутим, у природи то и није баш тако.

Ако догађаји увек иду ка будућности држећи се принципа вероватноће, они реализују највероватнија случајна стања у сваком тренутку своје садашњости, па би се супротним током времена они ка прошлости опет враћали кроз тада највероватнија стања. Делује парадоксално, али за ход догађаја уназад у времену такође важи и принцип вероватноће и принцип ентропије. То значи да поменуто просто враћање филма уназад не приказује реалност. Дакле, овде оживљавамо старе Фејманове идеје о супротном току времена позитрона (у односу на ток времена електрона).

Две честице са супротним временским током не могу комуницирати, бар не на начин нама познате комуникације у макро-свету. Када прва постави питање другој да би затим добила одговор, друга мора прво дати одговор па чути питање. То би могло имати мало више смисла у микро-свету, јер су честице „глупе“, оне „не памте“ и играју „на прву лопту“, а околности су такве да се од њих ништа друго и не тражи.

Пажљивије гледајући, за супротне временске токове, оно што је једном неизвесност другом је информација и обрнуто. Трагове открића да информација може прећи у неизвесност налазимо и у макро-свету. Рецимо, када решење једног проблема отвора нове проблеме. Други пример, када тек након одговора уследи питање, често виђамо код особа које се веома добро познају, или у лако предвидивим околностима. Према томе, идеје о супротном току времена постају опет прихватљиве, нарочито ако су услови у микро-свету једноставни а честице глупе.

Ради истога, овде предлажемо и збирни закон одржања за количину - „информација плус неодређеност“. Посебно, временски поредак информација које се гомилају у нашој прошлости не значи и дедукцију одговарајућих догађаја. Честа је грешка данас да се ово олако превиђа. Касније у овој књизи ћемо детаљније објашњавати квантну спрегнутост, када ћемо видети да је та врста превида чинила чудном, ради чега је квантна спрегнутост била неприхватљива физичарима 20. века, иако је сасвим логична према једначинама квантне механике.

[52]Richard Feynman (1918-1988), амерички физичар.
[53]Feynman diagram: `https://en.wikipedia.org/wiki/Feynman_diagram`

Glava 2

Простор-време

Мало подижемо лествицу, бар што се тиче језика симбола. Овај део књиге сам могао назвати и „Системи координата”, „Алгебра геометрије” са траговима филозофије природе и физике или једноставно „Теорија релативности”, али нити једно од тога не би било сасвим тачно. Тешко одолевам да као математичар не претерам са формулама, да не одбијем ионако ретке читаоце, а опет како другачије демонстрирати тачност прецизне теорије. Нема смисла рећи „и ово је научна фантастика” за штиво засновано на математичким анализама, а опет има потребе.

Време није математичка категорија. И када верујемо да оно има снагу праве дедукције, оно нема. Демонстрираћу то овде поменутим, а иначе познатим примером два саговорника којима време тече у супротним смеровима. Верује се да је њихова комуникација немогућа[1], јер док један поставља питање и чека одговор, други би морао прво дати одговор, па тек онда чекати питање. У свету екстремног детерминизма, када је баш све што ће бити негде унапред одређено, таква комуникација није нелогична. Међутим, она није немогућа нити у свакодневном животу, рецимо двоје људи који дуго живе заједно, па када једно од њих хоће да постави питање, а оно друго каже „стани, знам шта ћеш ме питати“, па пре питања каже одговор. Такође, у свету објективних случајности какав овде описујемо (када честице следе критеријуме кратке памети не марећи много за прошла и будућа стања ствари) нема контрадикције. Честице су можда управо зато толико глупе да би могле тако разноврсно комуницирати.

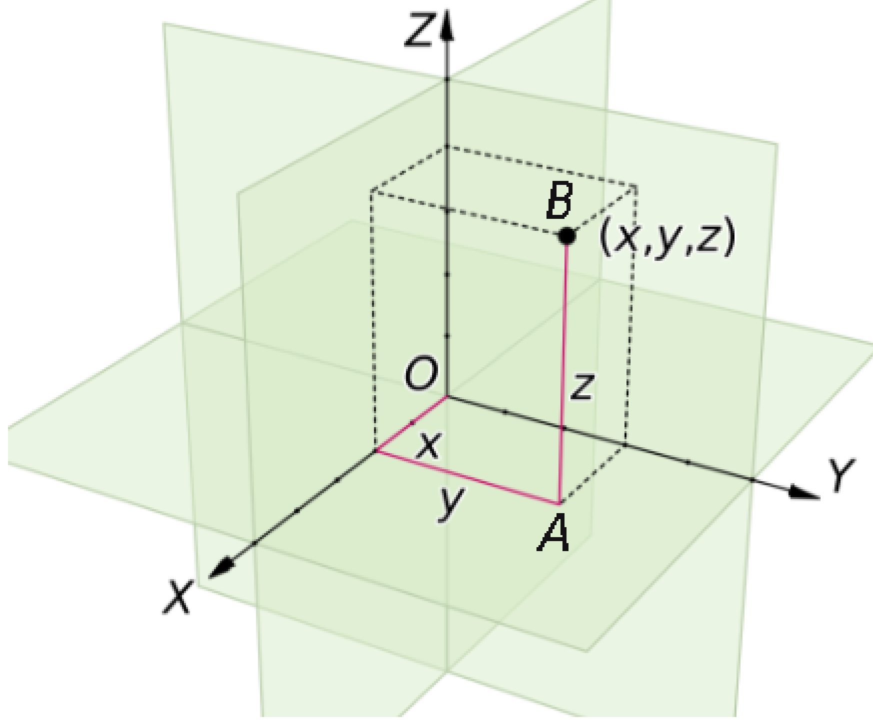
Математика је ванвременска и то је њена предност у истраживању времена. Она је невероватно тачна, али никада није била лака ствар. Почевши од широких народних маса, па све до оних ретких појединаца који је истински разумеју, математика је углавном потпуно нејасна или је „јасна” на неки погрешан, скаредан начин. Сетимо се Ератостена из античке Грчке, који је наводно изненађујуће тачно израчунао обим Земље, а за коју се и даље током скоро 2000 година веровало да није округла. Његова геометрија, иако учена, па и величана у школама, заправо никада није била у правом смислу схваћена, можда чак ни након Колумбових путовања. Помислимо на данашњу квантну механику која је математички неспорна, али и што се тиче многих експериментални потврда, а опет је потпуно нејасна филозофски и физикално.

Није једном речено да је било која наука само толико тачна колико у њој има математике. Необично је што је идеја егзактних наука сачувана кроз миленијуме идеологија и моћника који се природно боје истине, али је и срећа што права истина и није тако једноставна, па може остајати ван њиховог фокуса.

[1] Norbert Viner: *KIBERNETIKA*, upravljanje i komunikacija, ICS, Beograd, 1972.

2.1 Лоренцове трансформације

У Декартовом правоуглом систему координата $Oxyz$, на слици 2.1, све три координатне осе (апсциса x-оса, ордината y-оса и апликата z-оса) једнако су баждарене и узајамно окомите оријентисане праве линије са заједничким исходиштем у тачки O. У равни Oxy налази се тачка A са координатама $(x, y, 0)$, а на висини z од те равни изнад тачке A налази се тачка B са координатама (x, y, z).



Slika 2.1: Декартове правоугле координате.

Према Питагориној теореми налазимо редом:

$$\overline{OA}^2 = x^2 + y^2, \quad \overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2,$$

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad l = \overline{OB}. \tag{2.1}$$

Када се квадар са дате слике транслира (паралелно помери) за вектор $\overrightarrow{OO'}$, тада теме O квадра прелази у тачку O', а теме B у тачку B', па претходна једнакост постаје

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \tag{2.2}$$

где су $\Delta\xi$ дужине страница квадра паралелне координатама, редом $\xi = x, y, z$, а Δl је дужина премештања $\overrightarrow{OO'}$.

Након ове безвременске, математичке транслације користимо нове ознаке за дужине страница квадра, али све одговарајуће дужине остају исте. Када већ кажемо да је систем $Oxyz$ прешао у систем $O'x'y'z'$ транслацијом, онда је лако додати да је то померање зависно од протеклог времена t, тако да се дешава константном брзином дефинисаном вектором $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. То значи да се дуж коориднате $\xi \in \{x, y, z\}$ за

временски период Δt систем O' померио за дужину $v_\xi \Delta t$ у односу на систем O. Ако су се у почетном тренутку ($t = 0$) два система поклапала ($O \equiv O'$), тада у произвољном тренутку t важе трансформације координата:

$$x' = x - v_x t, \quad y' = y - v_y t, \quad z' = z - v_z t, \quad t' = t. \tag{2.3}$$

То су Галилејеве трансформације, где четврту једначину пишемо само да нагласимо да у оба система, непокретном O и покретном O', време тече једнаком брзином. Нема битног губитка општости када ставимо да је кретање само дуж апсцисе. Тада је укупна брзина број $v = v_x \neq 0$, док су остале две компоненте брзине нуле ($v_y = v_z = 0$).

Галилејеве трансформације су побољшаване Лоренцовим, првенствено због експеримената Мајкелсона и Морлија[2]. Њима је од 1887. године установљено да се *светлост креће увек истом брзином у вакууму*, око $c = 3 \times 10^8$ m/s, без обзира на брзину извора. Сазнање М-М експеримената је Ајнштајн узео за свој други принцип у раду који је објавио 1905. године, а који је данас познат као специјална теорија релативности. Први принцип му је био релативност кретања, да *физички закони система у којем посматрач мирује не зависе од тога да ли се тај систем креће* једнолико праволинијски у односу на неко друго тело или посматрача.

Укратко, Ајнштајнова принципи релативности су: 1. сва једнолико праволинијска кретања су равноправна и 2. брзина светлости у вакууму не зависи од брзине извора.

Пример 2.1.1. *Извести Лоренцове трансформације из Ајнштајнових принципа.*

Решење. Ајнштајнова релативност за четврту координату користи ct а то је пут који светлост пређе за време t. За систем O' који се креће брзином v у односу на систем O дуж апсциса, у најопштијем случају можемо ставити:

$$x' = \gamma(x - \beta\, ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = A\, ct - Bx, \tag{2.4}$$

где су γ, b, A, B непознати бројеви које тек треба одредити. Прва и четврта координата су функције зависне од узајамне брзине v кретања два система и евентуално још једино од брзине светлости c. Ове трансформације би постале Галилејеве (2.3) ако би било $\gamma = 1$, $\beta = v/c$, $A = 1$ и $B = 0$.

Када неки објекат мирује у O' на позицији $x' = 0$ он се креће константном брзином v апсцисом система O, тако да је $x = vt$, па је $\beta = v/c$ те $x' = \gamma(x - \frac{v}{c}\, ct)$. Према принципу релативности, инверзне трансформације између O' и O морају имати исту форму али са брзином супротног предзнака, па налазимо $x = \gamma(x' + \frac{v}{c}\, ct')$ за исти коефицијент γ. При томе је $t = x/c$ када год је $t' = x'/c$ и сменом у претходне једнакости затим множењем добијамо $xx' = \gamma^2(1 - v^2/c^2)xx'$. Отуда, за прву једначину:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{2.5}$$

Први коефицијент се назива Лоренцов фактор и већ смо га помињали (1.14). Друга једначина из (2.4) која дефинише трансформацију времена, може се добити из услова $x' = ct'$ и $x = ct$ сменом у претходне просторне координате одакле $ct' = \gamma(ct - \beta x)$. Према томе, Лоренцове трансформације су:

$$x' = \gamma(x - \beta\, ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x), \tag{2.6}$$

где су γ и β дати са (2.5). □

[2]Wikipedia: Michelson–Morley experiment

На основу првог Ајнштајновог принципа релативности и принципа вероватноће, да нам се најчешће догађа оно што је највероватније, следи да је посматрач у систему у којем мирује (сопствени систем) увек негде у врху ланца вероватноће случајних догађаја, док сви остали учесници релативних кретања то не морају бити. Другим речима, могуће је да су други релативни системи у стањима са мањим вероватноћама. Ако је тако, онда се из сопственог стања не прелази спонтано стање кретања, јер се не иде спонтано у стање мање вероватноће. То је овде предлагано, да из принципа вероватноће следи Њутнов закон инерције.

Због другог Ајнштајновог принципа, у оба система мерено светлост прелази неки пут за дато време истом брзином, што значи $\Delta l/\Delta t = \Delta l'/\Delta t' = c$, а отуда наслућујемо да је израз

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \tag{2.7}$$

инваријанта Лоренцових трансформација. То је поопштена Питагорина теорема, за 4-дим простор-време специјалне теорије релативности.

Пример 2.1.2. *Доказати да је израз (2.7) инваријанта Лоренцових трансформација.*

Решење. Полазећи од (2.6) добијамо, редом:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\, c\Delta t), \quad c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x),$$

$$(\Delta x')^2 = \gamma^2(\Delta x - \beta\, c\Delta t)^2, \quad c^2(\Delta t')^2 = \gamma^2(c\Delta t - \beta\Delta x)^2,$$

$$\begin{cases} (\Delta x')^2 = \gamma^2[(\Delta x)^2 - 2\beta\,\Delta x\, c\Delta t + \beta^2 c^2(\Delta t)^2] \\ c^2(\Delta t')^2 = \gamma^2[c^2(\Delta t)^2 - 2\beta\, c\Delta t\,\Delta x + \beta^2 (\Delta x)^2]. \end{cases}$$

Отуда одузимањем:

$$\begin{aligned}(\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2 &= \gamma^2[(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2] - \gamma^2\beta^2[(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2] \\ &= \gamma^2(1-\beta^2)[(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2] \\ &= (\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2.\end{aligned}$$

Додавањем квадрата интервала остале две координате добијамо $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2$, а то је оно што је и требало доказати. □

Таласна једначина која следи из Максвелових радова о електромагнетизму гласи

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0, \tag{2.8}$$

при чему је $1/c^2 = \mu_0\varepsilon_0$, где је $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2 магнетна, а $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m електрична константа пермеабилности вакуума.

Пример 2.1.3. *Доказати да је израз (2.8) Лоренцова инваријанта.*

Решење. Користећи (2.6) добијамо:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial x} = \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} - \beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'},$$

јер је $\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = 0$, а $\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma$ и $\frac{\partial ct'}{\partial x} = -\beta\gamma$. Други парцијални извод је извод првог извода, па слично налазимо, редом:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial ct'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial ct'}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} - \beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial ct'}\left(\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} - \beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\right)\frac{\partial ct'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial(x')^2} - 2\beta\gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'\,\partial ct'} + \beta^2\gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial(ct')^2}. \tag{2.9}$$

За другу и трећу координату налазимо:

$$\begin{cases} \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial y'} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{\partial\Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial z} = \frac{\partial\Psi}{\partial z'}, \end{cases}$$

а затим слично и друге изводе:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial(y')^2}, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial(z')^2}. \tag{2.10}$$

Истим поступком добијамо први парцијални извод за четврту координату:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial ct} = \frac{\partial\Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial\Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial ct} + \frac{\partial\Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial ct} + \frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\frac{\partial ct'}{\partial ct} = -\beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'},$$

јер је $\frac{\partial y'}{\partial ct} = \frac{\partial z'}{\partial ct} = 0$, а $\frac{\partial x'}{\partial ct} = -\beta\gamma$ и $\frac{\partial ct'}{\partial ct} = \gamma$. Отуда:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial(ct)^2} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(-\beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\right)\frac{\partial x'}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial ct'}\left(-\beta\gamma\frac{\partial\Psi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial ct'}\right)\frac{\partial ct'}{\partial ct}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial(ct)^2} = \beta^2\gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial(x')^2} - 2\beta\gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'\,\partial ct'} + \gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial(ct')^2}. \tag{2.11}$$

Уврштавањем (2.9), (2.10) и (2.11) у (2.8) и након сређивања добијамо

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial(x')^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial(y')^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial(z')^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial(t')^2} = 0, \tag{2.12}$$

а то је и требало доказати. □

Проналазећи управо ову инваријанту (2.8) односно (2.12), Лоренц[3] је пре Ајнштајна дошао до трансформација (2.6) које се по њему и називају. Међутим, он их није знао протумачити. Лоренц је извео исправан закључак да М-М експеримент показује контракцију дужина у правцу кретања, али то није видео у неком ширем контексту. Ипак, он је развио електромагнетну теорију светлости, проучавао је дифракцију светлости у кристалима, бинарне гасове и први је прорачунао цепање синглета спектралних линија на три компоненте у магнетном пољу. Лоренц је 1902. године добио Нобелову награду за физику за радове из електромагнетне теорије светлости.

Из Лоренцових трансформација је настала специјална теорија релативности, али начин на који их је Ајнштајн објаснио и како је даље тумачио једнолико праволинијска кретања оставило је много дубље трагове у физици.

[3] Hendrik Lorentz (1853-1902), холандски физичар.

2.2 Специјална релативност

Из Лоренцових трансформација (2.6) односно:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{2.13}$$

извешћемо формулу за дилатацију времена и контракцију дужина:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{2.14}$$

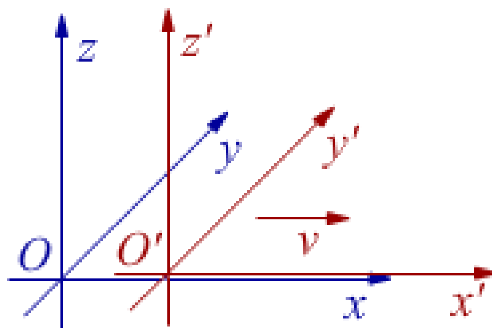
где су Δt_0 и Δl_0 сопствене а Δt и Δl релативне редом време и дужина у правцу кретања. Прву смо већ добили (1.23) из 4-интервала, али се то може и непосредно из (2.6). Затим ћемо извести и формуле за „сабирање" брзина:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \tag{2.15}$$

где се (треће) тело креће брзином $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ у односу на систем O, а брзином $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ у односу на O'. Заменом $v \to -v$ добијамо кретање O у односу на O' и:

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \tag{2.16}$$

а то су инверзне Лоренцове трансформације.



Slika 2.2: Транслација дуж апсциса.

Пример 2.2.1. *Из (2.13) извести прву једначину (2.14), дилатацију времена.*

Решење. Два догађаја $A_1(t_1, x_1)$ и $A_2(t_2, x_2)$ десила су се на истом месту, $x_1 = x_2$, у систему координата O. Сопствено протекло време између тих догађаја је

$$\Delta t_0 = t_2 - t_1.$$

Исто време у односу на релативног посматрача из система O' износиће:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

јер је $x_2 - x_1 = 0$. Отуда тражена формула. □

Пример 2.2.2. *Из (2.13) извести другу једначину (2.14), контракцију дужина.*

Решење. Два догађаја $A_1(t_1, x_1)$ и $A_2(t_2, x_2)$ десила су се у истом тренутку, $t_1 = t_2$, на два краја штапа који лежи на апсциси у систему координата O. Сопствена дужина штапа је

$$\Delta l_0 = x_2 - x_1.$$

Ако су се та два догађаја десила у исто време и у систему O' биће $t'_1 = t'_2$, па је у примованим координатама измерена релативна дужина штапа $\Delta l = x'_2 - x'_1$. Сада за сопствену дужину имамо:

$$\Delta l_0 = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

јер је $t'_2 - t'_1 = 0$. Отуда тражена формула. □

Пример 2.2.3. *Из (2.13) извести једначине (2.15), сабирања брзина.*

Решење. Брзина је пређени пут за протекло време. Зато имамо, редом:

$$u_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}{\frac{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta x'/c^2} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}},$$

$$u_y = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\frac{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} = \frac{\Delta y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\Delta t' + v\Delta x'/c^2} = \frac{\frac{\Delta y'}{\Delta t'}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{\Delta y'}{\Delta t'}},$$

па из $u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ и $u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}$ следе тражене формуле. □

Из Ајнштајновог тумачења Лоренцових трансформација произашли су изрази за релативистички Доплеров ефекат, које сматрамо побољшањем класичног. У овој књизи они су већ помињани уз формуле (1.19) и (1.22), где прва описује лонгитудинални Доплеров ефекат коју доказујемо у следећем примеру, а друга трансферзални који је непосредна последица дилатације времена.

Пример 2.2.4. *Помоћу Лоренцових трансформација доказати формулу за фреквенцију светлости извора у кретању брзином $\pm v$, минус за долазећи а плус за одлазећи:*

$$f = f_0\sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \tag{2.17}$$

где су f_0 и f редом сопствена и релативна фреквенција.

Решење. Трајање осцилације је $\Delta t = 1/f$ односно $\Delta t' = 1/f'$ а за то време светлост пређе пут $\Delta x = c\Delta t$. Из Лоренцових трансформација имамо $\Delta t' = \gamma(\Delta t + v\Delta t/c)$, затим:

$$f' = f\frac{1}{\gamma(1 + v/c)} = f\frac{\sqrt{(1 - v/c)(1 + v/c)}}{1 + v/c},$$

па скраћивањем и тумачењем добијамо тражену формулу. □

У следећем примеру разматрамо принцип релативности кретања и закон одржања импулса (количине кретања) да бисмо дошли до познате формуле

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.18}$$

Ту је m_0 сопствена маса (маса у мировању) тела, а m је релативна маса истог тела каквом је види посматрач у кретању брзином v. Брзина светлости у вакууму је c.

Пример 2.2.5. *Доказати формулу (2.18).*

Решење. Замислимо да пругом паралелно апсциси, константном брзином v клизи неко шинско возило (нпр. трезина) са којег путник баца лопту масе m брзином u_y паралелно ординати. На насипу поред пруге стоји друга особа која баца другу идентичну лопту једнаком брзином окомито ка шинама тако да се две лопте сударају тачно на половини пута и одбијају истим брзинама назад. Када занемаримо трење и апстрахујемо масе, кретања лопти и њихове импулсе, лопте у односу на сопствене посматраче одлазе и након одбијања долазе истим путањама а супротним брзинама.

Због принципа релативности кретања, имамо симетрију. За сваког од посматрача његова лопта има масу m док је маса оне друге m'. Интензитет брзине сопствене лопте је u_y а бочно кретање $u_x = 0$, док је брзина оне друге u'_y са бочним кретањем $u'_x = v$. Због закона одржања импулса p сопствене и p' оне друге лопте (рецимо са становишта посматрача на насипу) имамо, редом:

$$p = p',$$

$$mu_y = m'u'_y,$$

$$mu_y = m'\frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u_x = 0,$$

$$m = m'\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Сменом $m \to m_0$ и $m' \to m$ добијамо формулу (2.18). □

Приметимо да исти пример доказује и формулу за импулс

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.19}$$

тела сопствене масе m_0 у кретању брзином v. Могли бисмо писати и $p = \gamma p_0$ када би имало смисла говорити о сопствном импулсу $p_0 = m_0 v$. Усклађивање закона класичне механике са специјалном теоријом релативности може ићи и даље.

Као што знамо, количина рада (енергије) потребна да се повећа брзина тела са брзине $v_1 = 0$ на брзину $v_2 = v$ дефинише се интегралом

$$E_k = \int_1^2 F\,dx. \tag{2.20}$$

Кинетичка енергија E_k је разлика енергије E коју тело има у кретању брзином v и сопствене енергије E_0 коју исто тело има у мировању. Када је маса тела у мировању m_0 показује се да тело у наведеном кретању добија кинетичку енергију

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \tag{2.21}$$

У следећем примеру изложен је (прилагођени) начин извођења ове формуле од стране Ајнштајна у његовом раду из 1905. године.

Пример 2.2.6. *Користећи дефиницију рада (2.20) доказати (2.21).*

Решење. Имамо редом:

$$E_k = \int_1^2 F\,dx = \int_1^2 \frac{dp}{dt}\,dx = \int_1^2 dp\,\frac{dx}{dt} = \int_1^2 v\,dp.$$

Како је $d(vp) = vdp + pdv$ то је $vdp = d(vp) - pdv$, па настављамо:

$$E_k = \int_1^2 v\,dp = \int_1^2 [d(vp) - pdv] = \int_1^2 d(vp) - \int_1^2 p\,dv,$$

а због (2.19) имамо даље:

$$E_k = \int_1^2 d(pv) - \int_1^2 \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,dv = pv\Big|_0^v + m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Big|_0^v =$$

$$= \frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \left(m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_0c^2\right)$$

$$= \frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \left[\frac{m_0c^2\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2\right]$$

$$= \frac{m_0v^2 + m_0c^2 - m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2,$$

$$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2,$$

а то је оно што је требало доказати. □

Када ову формулу напишемо у облику $E_k = E - E_0$ онда лако схватимо да укупна енергија тела (енергија у мировању плус кинетичка енергија) износи

$$E = mc^2, \tag{2.22}$$

где је $m = \gamma m_0$ маса тела, према (2.18). То је позната формула за укупну енергију тела, данас симбол за Ајнштајна и његову теорију релативности.

Као што знамо из класичне механике, *лагранжијан* $\mathcal{L}$ система честица одређен је разликом кинетичке и потенцијалне енергије. Интеграл лагранжијана по времену назива се *дејство* или акција, које има физичку димензију угловног момента, а то је енергија пута време, или импулс пута дужина. Физички системи се развијају тако да следе принцип најмањег дејства. Показује се да ти појмови класичне механике имају (сличног) смисла и у релативистичкој механици.

Дејство за слободну честицу, у специјалној релативности, мора имати облик

$$S = \alpha \int_a^b ds, \tag{2.23}$$

где се интеграли дуж светске линије (тачака 4-дим простор-времена) између два задата догађаја, први у тренутку t_1 а други у t_2. Интервал ds дефииншемо из (2.7), смањујући дужине (делта) на инфинитезимале:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2. \tag{2.24}$$

Отуда и због $dl/dt = v$ добијамо

$$ds = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, icdt, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{2.25}$$

а затим:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} i\alpha c\sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt. \tag{2.26}$$

Упоређујући са класичном физиком, добијамо да лагранжијан за релативистичку честицу мора бити облика

$$\mathcal{L} = i\alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{2.27}$$

Величина α је карактеристика дате честице, попут масе у класичној физици. Када $c \to \infty$ израз за лагранжијан би морао прећи у класични $\mathcal{L} \to \frac{1}{2}m_0v^2$ где је m_0 класична маса (сада маса у мировању) честице. Зато развијамо корен (2.27) у Маклоренов ред (1.45) по степенима $x = v/c$. Занемарујући степене вишег реда налазимо

$$\mathcal{L} = i\alpha c - \frac{i\alpha v^2}{2c} = \text{const} + \mathcal{L}_0, \tag{2.28}$$

где је десно константа интеграције лагранжове функције, израз који овде можемо изоставити. Упоређујући са класичним лагранжијаном налазимо

$$\alpha = im_0c. \tag{2.29}$$

На тај начин видимо да дејство на слободну материјалну тачку износи

$$S = m_0c \int_a^b ds, \tag{2.30}$$

а лагранжијан

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{2.31}$$

где је m_0 маса у мировању дате честице, v је брзина кретања честице, а c је брзина светлости у вакууму.

Да бисмо проверили формулу (2.31) тестираћемо је користећи класичне изразе за лагранжијан да бисмо добили релативистичку масу (2.18), импулс (2.19) и енергију (2.22). То пре свега значи да је импулс честице вектор

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}, \tag{2.32}$$

где узимамо парцијалне изводе лагранжијана $\mathcal{L}$ по одговарајућим компонентама вектора брзине $\mathbf{v}$ и добијамо компоненте вектора импулса $\mathbf{p}$. Лако налазимо да је

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.33}$$

што се слаже са (2.19). Као што је познато, енергија честице назива се величина

$$E = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - \mathcal{L}, \tag{2.34}$$

одакле уврштавањем (2.33) и (2.31) налазимо:

$$E = \frac{m_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{m_0v^2 + m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.35}$$

а то је једнако резултату (2.22).

Из израза за релативистички импулс (2.33) и енергију (2.35) изводимо израз

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}, \tag{2.36}$$

који повезује импулс и енергију слободне материјалне честице, који нам даје идеју за проширење појма вектора импулса са три димензије простора на четири димензије простор-времена $(p_\mu) = (p_x, p_y, p_z, p_{ct})$:

$$(p_\mu) = (mv_x, mv_y, mv_z, E/c). \tag{2.37}$$

Показаћемо да је у специјалној теорији релативности оправдано посматрати импулс и енергију као компоненте једног истог 4-вектора (p_μ).

Пример 2.2.7. *Показати да је праволинијско кретање у 4-димензионалном простор-времену специјалне теорије релативности инерцијално кретање.*

Решење. Према принципу најмањег дејства биће $\delta S = 0$ само у случају спонтаних кретања, која значе кретања неизазвана дејством вањских сила, односно кретања без убрзања. Кретање без дејстава у специјалној теорији релативности су проволинијска кретања. За мале промене дејства добијамо редом:

$$\delta S = \delta(m_0c\int_a^b ds) = m_0c\,\delta\int_a^b\sqrt{\sum_\mu dx_\mu^2} = m_0c\int_a^b\frac{\sum_\mu dx_\mu\delta dx_\mu}{\sqrt{\sum_\mu dx_\mu^2}} = m_0c\int_a^b\sum_\mu u_\mu d\delta x_\mu,$$

где је $u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$ компонента 4-брзине, а индекси μ означавају редом координате x, y, z, ct. Парцијалном интеграцијом даље добијамо:

$$\delta S = \sum_\mu\left(m_0cu_\mu x_\mu\Big|_a^b - m_0c\int_a^b\delta x_\mu w_\mu ds\right) = 0,$$

где је $w_\mu = \frac{du_\mu}{ds}$ компонента 4-убрзања. На границама кретања варијације морају исчезавати, $(\delta x_\mu)_a = (\delta x_\mu)_b = 0$, а одатле следи $w_\mu = 0$, тј. да су све четири компоненте брзине честице као трајекторије светског догађаја у простор-времену константне. То је оно што је требало показати. □

У последњем изразу уместо $(\delta x_\mu)_b$ можемо писати једноставно δx_μ, те уопште

$$\delta S = \sum_\mu m_0 c u_\mu \delta x_\mu, \quad p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu} = m_0 c\, u_\mu. \tag{2.38}$$

Вектор у четири димензије простор-времена са компонентама p_μ назива се 4-вектор импулса. Лако је проверити да су његове компоненте (2.37), чиме су оне оправдане.

Како су компоненте 4-вектора импулса дефинисане помоћу компоненти четири координате (три просторне и једна временска), које се трансформишу помоћу Лоренцових трансформација, то су трансформације овог импулса:

$$p_x = \gamma(p_x' + \beta E'/c), \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z', \quad E = \gamma(E'/c + \beta p_x'), \tag{2.39}$$

са истим β и γ као у (2.6). Доследно овоме, из (2.24) следи $\sum_\mu u_\mu^2 = 1$, а отуда и из друге једначине (2.38) добијамо за збир квадрата четири компоненте импулса

$$\sum_{\mu=1}^{4} p_\mu^2 = m_0^2 c^2. \tag{2.40}$$

Заменом четврте компоненте импулса са њеном вредношћу (2.37) добијамо

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2, \tag{2.41}$$

где је $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ интензитет просторног, класичног импулса. Као што је познато, енергија изражена помоћу импулса назива се Хамилтонова[4] функција и означава са H. Овде налазимо

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}, \tag{2.42}$$

дакле да се релативистичка енергија своди на познати класични израз за Хамилтонову функцију.

Ово је била ретроспектива већ одавно класичних сазнања теорије релативности, са којом смо дошли на корак пред оно што то није. Из (2.40) лако изводимо

$$m_0 c \Delta s = \Delta x_1 \cdot p_1 + \Delta x_2 \cdot p_2 + \Delta x_3 \cdot p_3 + \Delta x_4 \cdot p_4, \tag{2.43}$$

где је стављено $x_4 = ict$ и $p_4 = m_0 c dx_4/ds$ просто зато да би збир квадрата био (2.24), односно (2.7). На левој страни једнакости је инваријанта која се мења само са променом сопствене масе m_0 дате честице. Приметимо да тај израз веома подсећа на скаларни производ $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$ који је био централна тема књиге „Информација перцепције“ (в. [1]).

Када свет (класичне и релативистичке) механике не би био строго детерминистички уређен и када би он био смештен у простор-времену које има више од четири димензије на начин да дозвољава случајности које се понашају доследно теорији вероватноће, онда бисмо могли сматрати да једнакост (2.43) представља слободу честице. Дата честица се може колебати око свог положаја у оквиру неизвесности одређене вектором $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4)$ интензитета Δs, али само пратећи свој импулс тако да важи једнакост (2.43).

Када би то било тако, ми бисмо били веома близу да механику почнемо озбиљно третирати помоћу теорије вероватноће.

[4]William Rowan Hamilton (1805-1865), ирски физичар, астроном и математичар.

2.3 Ротације

Оно што је и исто у различитом, у геометрији се назива симетрија, а у физици законом природе. Примери геометријских симетрија су огледалске рефлексије, осне симетрије, централне симетрије, транслација, а свака од њих се може добити неком ротацијом. Из значаја ротација у геометрији следи њихова важност за физику.

Slika 2.3: Рефлексије природе на води.

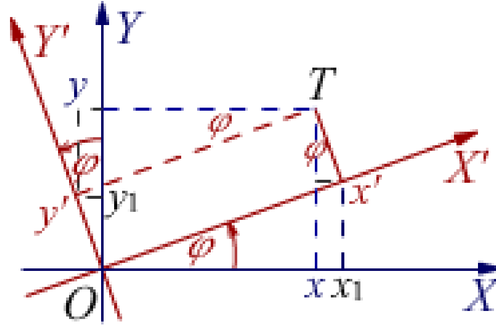
Осна симетрија тачака у равни је пресликавање које конструишемо када кроз дате тачке повучемо нормале (окомице) на осу симетрије (праву), а затим их пренесемо на исту удаљеност са друге стране те осе. Три тачке које чине троугао једне оријентације пресликаће се осном симетријом у три тачке које чине подударан троугао супротне оријентације. Зато, њихово поклапање није могуће добити премештањем датог троугла у равни симетрије, али је то могуће 3-дим ротацијом дате равни око њене осе симетрије. Слично би се огледалска симетрија која леву оријентацију рефлектује у десну и обрнуто, могла добити 4-дим ротацијом 3-дим простора око равни огледала.

Централна симетрија у равни има једну заједничку тачку те равни која је средиште дужи одређеном тачкама оригинала и копије. Она може се добити ротацијом те равни око централне тачке за испружен угао. Транслација, померање тачака за дати вектор, може се добити помоћу две централне симетрије, дакле са две ротације. Све ово се учи у средњим школама, па о томе нећемо детаљисати. Приметите само да због необичних веза геометрије са физиком није изненађење да се Лоренцове трансформације могу представити ротацијом.

На слици 2.4 правоугли Декартов систем координата OXY ротиран је у истој равни у систем $OX'Y'$ за оријентисани угао φ око исходишта. Иста тачка T те равни у два система има координате $T(x,y)$ и $T(x',y')$. Са слике читамо:

$$\overline{Ox_1} = \overline{Ox} + \overline{xx_1}, \quad \overline{Oy_1} = \overline{Oy} - \overline{yy_1},$$

$$x'\cos\varphi = x + y'\sin\varphi, \quad y'\cos\varphi = y - x'\sin\varphi.$$



Slika 2.4: Ротација координата за угао φ.

Отуда директне и инверзне трансфомације:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases} \tag{2.44}$$

Ове трансформације можемо писати и матрично, рецимо директне:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

или краће $\mathbf{v} = \hat{R}\mathbf{v}'$, где су компоненте вектора $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ и матрице ротације $\hat{R}$ очигледне.

Узмемо ли за компоненте ових вектора Лоренцову апсцису $x_1 = x$ и временску осу $x_4 = ict$, добијамо Лоренцову директну и инверзну ротацију:

$$\begin{cases} x_1 = x_1'\cos\varphi - x_4'\sin\varphi \\ x_4 = x_1'\sin\varphi + x_4'\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = x_1\cos\varphi + x_4\sin\varphi \\ x_4' = -x_1\sin\varphi + x_4\cos\varphi. \end{cases} \tag{2.46}$$

Након смене $\varphi = i\phi$, $i = \sqrt{-1}$ и преласка на синус и косинус хиперболни, ове обичне постају хиперболне Лоренцове ротације:

$$\begin{cases} x = x'\operatorname{ch}\phi - ict'\operatorname{sh}\phi \\ ct = -x'\operatorname{sh}\phi + ct'\operatorname{ch}\phi, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x\operatorname{ch}\phi + ict\operatorname{sh}\phi \\ ct' = x\operatorname{sh}\phi + ct\operatorname{ch}\phi. \end{cases} \tag{2.47}$$

Веза међу њима су познате релације између обичних и хиперболних[5] тригонометријских функциа: $\sin\varphi = -i\operatorname{sh}(i\varphi)$ и $\cos\varphi = \operatorname{ch} i\varphi$. Стављајући $x' = x_1' = 0$ налазимо брзину примованог система у непримованом:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{x}{ct} = \frac{ict'\operatorname{sh}\phi}{ct'\operatorname{ch}\phi} = i\operatorname{th}\phi = \operatorname{tg}\varphi. \tag{2.48}$$

Веза између тангенса хиперболног (th) и обичног (tg) је $\operatorname{th}\phi = -i\operatorname{tg}(i\phi) = -i\operatorname{tg}\varphi$, а отуда наведено $\beta = \operatorname{tg}\varphi$.

Основне хиперболне тригонометријске функције су:

$$\begin{cases} \operatorname{sh}\phi = \frac{e^{\phi}-e^{-\phi}}{2} & \operatorname{ch}\phi = \frac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{2} \\ \operatorname{th}\phi = \frac{e^{\phi}-e^{-\phi}}{e^{\phi}+e^{-\phi}} & \operatorname{cth}\phi = \frac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{e^{\phi}-e^{-\phi}}. \end{cases} \tag{2.49}$$

[5]Хиперболне, или хиперболичне функције је увео у употребу италијански математичар Винченцо Рикати (Vincenzo Riccati, 1707-1775)

То су редом синус, косинус, тангенс и котангенс хиперболни. Да оне заиста доводе до релација (2.47) видимо из развоја обичних и хиперболних тригонометријских функција у Маклоренове редове:

$$\begin{cases} \operatorname{sh}\phi = \phi + \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} + \frac{\phi^7}{7!} + \dots, & \operatorname{ch}\phi = 1 + \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{\phi^6}{6!} + \dots, \\ \sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots, & \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots, \end{cases} \tag{2.50}$$

па стављајући поменуту смену $\varphi = i\phi$, $i = \sqrt{-1}$. Из дефиниција (2.49) лако налазимо $\operatorname{ch}^2\phi - \operatorname{sh}^2\phi = 1$, а затим и остале основне идентитете:

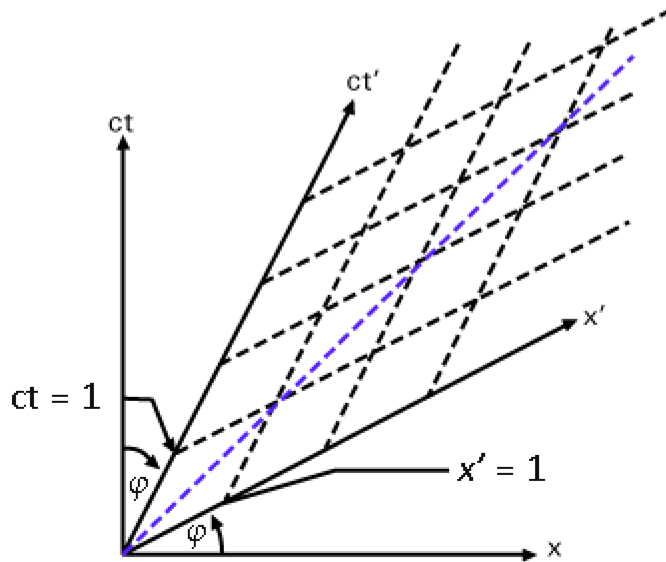
$$\begin{cases} \operatorname{th}\phi = \operatorname{sh}\phi / \operatorname{ch}\phi & \operatorname{cth}\phi = \operatorname{ch}\phi / \operatorname{sh}\phi \\ \operatorname{sh} 2\phi = 2\operatorname{sh}\phi \operatorname{ch}\phi & \operatorname{ch} 2\phi = \operatorname{ch}^2\phi + \operatorname{sh}^2\phi, \end{cases} \tag{2.51}$$

или рецимо $\operatorname{th} 2\phi = 2\operatorname{th}\phi/(1 + \operatorname{th}^2\phi)$, када већ помињемо двоструке углове. Сви остали идентитети обичне тригонометрије такође су слични хиперболним. На пример, адиционе формуле за збир и разлику углова хиперболних функција су:

$$\begin{cases} \sin(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{th}(x \pm y) = (\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y)/(1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y). \end{cases} \tag{2.52}$$

Ипак су видљиве и разлике.

Лоренцове трансформације (2.47) скупљају x и ct осу, за разлику од ротације(2.46) код којих угао између апсисе и ординате након ротације остаје исти - прав. На слици 2.5 видимо тај ефекат.



Slika 2.5: Лоренцове трансформације стишћу осе.

Када је брзина примованог система 60 одсто брзине светлости, биће $v = 1,8 \times 10^8$ m/s, односно $\beta = v/c = 0,6$. Тада је угао ротације $\varphi = \operatorname{arctg} 0,6 \approx 31^\circ$. Обе осе, x и ct, се Лоренцовом „ротацијом“ нагињу за угао φ према симетрали квадранта (испрекидана плава линија) са којом би се поклопиле у случају да је $v = c$. Догађаји на истом

месту покретног система $O'x'ct'$ су на истој (испрекиданој) паралели са ct'-осом, док се истовремени догађаји налазе на појединим испрекиданим паралелама са x'-осом. У непокретном систему $Oxct$, догађаји на истом месту били би на паралели са ct-осом, а истовремени догађаји били би на паралели са x-осом. Са слике 2.5 видимо да у два система O и O' нити догађаји „на истом месту“ нити „истовремени“ нису исти.

Док систем O' одлази догађаји у њему одлазе све даље у прошлост система O, али и обрнуто, непокретни систем је истовремен са све даљим догађајима из прошлости покретног система. Супротно томе, када се посматрач из система O' приближава посматрачу из система O они су један другоме у све ближој будућности. То пре свега значи да релативно (оно у другом систему) време протиче спорије од сопственог, а затим доводи до привида који називамо „парадокс близанаца“.

Парадокс близанаца настаје када замислимо два брата близанца од којих један остаје у систему O а други отпутује системом O' са којим се затим и врати назад. Због успореног тока времена у систему O' путник је спорије старио и када се вратио нашао је да је он млађи од првог брата. Међутим, због принципа релативности, други брат би наводно могао сматрати да је он био у стању мировања а да је први брат путовао, па би по истој логици тада први брат морао доћи млађи од другога. То је парадокс.

Грешка у овом размишљању је у превиду чињенице да браћа у овим путовањима нису равноправна. Први од браће је стално био у инерцијалном систему, а други се морао окретати да би се враћао назад и при томе напуштати инерцијални систем. Напуштајући првог брата, други је заостајао све дубље у његовој прошлости, да би након окретања почео да се приближава, што значи да се појавио у будућности првог брата и кретао се ка његовој садашњости. Појавио се мањак историје другог у односу на првог брата, а то је управо оно што му недостаје приликом поновног сусрета, због чега му је први брат тада (стварно) старији.

Парадокс близанаца указује и на разлике између инерцијалних и неинерцијалних кретања. Инерцијална кретања су једнолико праволинијска у одсуству вањских сила, за разлику од неинерцијалних. Таква су (приближно) и кретања тела у слободном паду у гравитационом пољу, када занемаримо узајамне привлачне гравитационе силе делова тела и ефекте повлачења крајева тела ка истом центру гравитације. Али о томе ћемо детаљније мало касније.

Ротације (2.44) можемо добити и помоћу комплексних бројева. Комплексан број $z = x + iy \in \mathbb{C}$ са својим реалним $\Re(z) = x$ и имагинарним делом $\Im(z) = y$, који су реални бројеви ($x, y \in \mathbb{R}$), у комплексној равни представљамо тачком z са апсцисом и ординатом, редом:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha. \tag{2.53}$$

Модул односно интензитет комплексног броја је реалан позитиван број $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент комплексног броја је угао $\alpha = \angle xOz = \text{arctg}(y/x)$. Када је дат јединични комплексни број $z_0 = x_0 + iy_0$, такав да је $|z_0| = 1$, при чему је $x_0 = \cos\varphi$ и $y_0 = \sin\varphi$, тада је производ:

$$zz_0 = (x + iy)(z_0 + iy_0) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0) =$$

$$= r[(\cos\alpha\cos\alpha_0 - \sin\alpha\sin\alpha_0) + i(\sin\alpha\cos\alpha_0 + \cos\alpha\sin\alpha_0)],$$

$$zz_0 = r[\cos(\alpha + \alpha_0) + i\sin(\alpha + \alpha_0)], \tag{2.54}$$

где су примењене адиционе формуле за косинус и синус збира. Према томе, множење јединичним комплексним бројем $z_0 = x_0 + iy_0$ комплексног броја $z = x + iy$ представља ротацију броја z око исходишта комплексне равни за аргумент, угао $\alpha_0 = \operatorname{arctg}(y_0/x_0)$, броја z_0. Множењем истим z_0 читава комплексна раван се ротира за исти угао α_0.

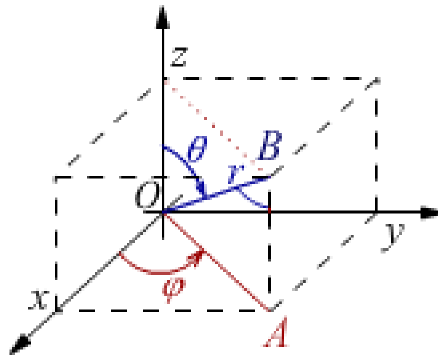
Због ове адитивности аргумената комплексних бројева и познате адитивности експонената при множењу степених функција истих база, показује се да важи

$$z = x + iy = re^{i\alpha}, \tag{2.55}$$

где је $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = y/x$. Доказ се може извести развојем експоненцијалне функције (овде $e^{i\alpha}$) у Маклоренов ред. Тај иначе познати запис комплексног броја помоћу експоненцијалне функције, са базом Ојлеровим бројем $e = 2,71828\dots$, баца ново светло на овде раније изведене једначине гравитационог поља (1.46). Отвара се могућност посматрања гравитационог поља као непрекидног простора мноштва малих (инфинитезималних) инерцијалних система координата аналогних Лоренцовим.

Уместо читавих координатних оса x и ct, користићемо њихове мале (инфинитезималне) делове dx и cdt, при чему ћемо Лоренцову „апсцису“, аналогију правца кретања специјалне релативности, постављати увек радијално у правцу гравитационог поља. Зато ћемо тај правац означавати другачије, рецимо са dr уместо dx. Друге координате, попут $d\varphi$ и $d\theta$ које су у случају сферног система $Or\varphi\theta$ окомите на правац простирања гравитационог поља, гравитација неће деформисати. Наиме, када би све координате биле једнако деформисане, резултат деловања на равни био би опет равни Еуклидов простор у којем нема гравитационе силе. Са друге стране, ова несиметрична, радијална деформација, проузроковаће и познати гравитациони ефекат бочног стискања тела, окомито на радијалне силнице поља.

Овде подразумевамо сферне координате као на слици 2.6. Ако их будемо означавали *коваријантим* (доњим) индексима, биће у редоследу $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$ и $x_3 = \theta$, са придруженом временском координатом, која ће као четврта координата бити $x_4 = ict$, где је $i = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица. Исти је редослед и у случају означавања контраваријантним (горњим) индексима x^μ, $\mu = 1, 2, 3, 4$.



Slika 2.6: Сферне координате $Or\varphi\theta$.

Са слике се види $r = \overline{OB}$, а затим:

$$\begin{cases} x = \overline{OA}\cos\varphi, & \overline{OA} = r\sin\theta, \\ y = \overline{OA}\sin\varphi, & z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{2.56}$$

затим лако налазимо трансформације:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ \theta = \arccos\frac{z}{r}. \end{cases} \tag{2.57}$$

Деривације ових координата су:

$$\begin{cases} dx = \cos\varphi\sin\theta\,dr - r\sin\varphi\sin\theta\,d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\,d\theta \\ dy = \sin\varphi\sin\theta\,dr + r\cos\varphi\sin\theta\,d\varphi + r\sin\varphi\cos\theta\,d\theta \\ dz = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta, \end{cases} \tag{2.58}$$

па квадрирањем и уврштавањем (сабирањем) у релативистички израз (2.24), након сређивања добијамо

$$ds^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + r^2\,d\theta^2 - c^2dt^2. \tag{2.59}$$

То је релативистички интервал за инфинитезимале у сферним координатама $Or\varphi\theta$ за равни простор-време.

Потсетимо се (1.49), да смо из ефеката контракције дужина и дилетације времена за простор-време добили метрику

$$ds^2 = e^{2GM/rc^2}\,dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + r^2\,d\theta^2 - e^{-2GM/rc^2}\,c^2dt^2, \tag{2.60}$$

а затим апроксимацијом (1.45) и израз

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + r^2\,d\theta^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2dt^2, \tag{2.61}$$

који је једнак Шварцшилдовој метрици. Ова метрика је добро позната у општој теорији релативности. То је решење Ајнштајнових једначина поља за случај централно симетричне гравитације. Касније се показало да се свако гравитационо поље може свести на више оваквих Шварцшилдових, као што се и стварна гравитација састоји од скупова појединих тела (честица).

У следећим разматрањима користимо сферни систем координата $Or\varphi\theta$ са центром гравитације у исходишту, тако да у случају посматрања из два система (са истим исходиштем) углове (φ и θ) можемо сматрати непромењеним.

Теорема 2.3.1. *Дате су трансформације диференцијала*

$$\begin{cases} dr = \chi\,dr' + i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\,cdt' \\ cdt = i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\,dr' + \gamma^2\chi\,cdt', \end{cases} \tag{2.62}$$

где је $i = \sqrt{-1}$ *имагинарна јединица,* $\gamma = e^{GM/rc^2}$*, а* $\chi \in \mathbb{C}$ *произвољан параметар. Показати да су то опште трансформације које метрику (2.60) равнају у (2.59).*

Доказ. Игноришемо координате које не утичу на резултат ($d\varphi = d\varphi'$ и $d\theta = d\theta'$) и полазимо од система:

$$\begin{cases} dr = \alpha_{rr}\,dr' + \alpha_{rt}\,cdt' \\ cdt = \alpha_{tr}\,dr' + \alpha_{tt}\,cdt', \end{cases} \tag{2.63}$$

где α_{mn} зависе само од r. Сменом у скраћени израз (2.60) добијамо:

$$ds^2 = \gamma^2\,dr^2 - \gamma^{-2}\,c^2dt^2 =$$

$$= \gamma^2(\alpha_{rr}\,dr' + \alpha_{rt}\,cdt')^2 - \gamma^{-2}(\alpha_{tr}\,dr' + \alpha_{tt}\,cdt')^2$$

$$= (\gamma^2\alpha_{rr}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tr}^2)\,dr'^2 + 2(\gamma^2\alpha_{rr}\alpha_{rt} - \gamma^{-2}\alpha_{tr}\alpha_{tt})\,dr'\,cdt' + (\gamma^2\alpha_{rt}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tt}^2)\,c^2dt'^2.$$

Изједначавајући овај интервал са $dr'^2 - c^2dt'^2$ добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} \gamma^2\alpha_{rr}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tr}^2 = 1, \\ \gamma^2\alpha_{rr}\alpha_{rt} - \gamma^{-2}\alpha_{tr}\alpha_{tt} = 0, \\ \gamma^2\alpha_{rt}^2 - \gamma^{-2}\alpha_{tt}^2 = -1. \end{cases}$$

То су три једначине са четири непознате алфе што значи да имамо произвољан параметар, нека је то $\alpha_{rr} = \chi \in \mathbb{C}$. Из прве једначине следи $\alpha_{tr} = \pm i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}$. Из треће једначине добијамо $\alpha_{rt} = \pm i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^{-2}\alpha_{tt}^2}$, што уврштено у средњу даје, редом:

$$\gamma^2\chi(\pm i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^{-2}\alpha_{tt}^2}) - \gamma^{-2}(\pm i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2})\alpha_{tt} = 0,$$

$$\gamma\chi\sqrt{1-\gamma^{-2}\alpha_{tt}^2} = \gamma^{-1}\alpha_{tt}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2},$$

$$\chi^2(\gamma^2 - \alpha_{tt}^2) = \alpha_{tt}^2(\gamma^{-2} - \chi^2),$$

$$\chi^2\gamma^2 = \alpha_{tt}^2\gamma^{-2},$$

одакле следи $\alpha_{tt} = \pm\gamma^2\chi$ и $\alpha_{rt} = \pm i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}$. Када узмемо само горње предзнаке, добијамо тражени систем. □

Занимљиво је да сам сличан прилог пре пар година слао неком стручном часопису, надајући се да би га они можда објавили. Примедбе рецензената, поред лошег енглеског, биле су да то што им пишем не може бити тачно. Нисам наставио дописивање, већ сам закључио да би теорема 2.3.1 могла бити оригинално моја. Благо речено, можда им је било необично што се равна Лоренцова метрика (еуклидског простора) може тек тако превести у метрику Ајнштајновог (закривљеног) простора гравитације, или обрнуто. Међутим, иза ових „лаких“ превођења крију се и већа чуда.

Када боље погледамо трансформације (2.63) видимо да множењем прве са γ а друге са $i\gamma^{-1}$ добијамо:

$$\begin{cases} \gamma\,dr = \gamma\chi\,dr' + \sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\,icdt' \\ \gamma^{-1}\,icdt = -\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\,dr' + \gamma\chi\,icdt', \end{cases} \tag{2.64}$$

што значи да оне постају инверзне Лоренцове (2.46), где $dx_1 = \gamma dr$, $dx_4 = icdt$ и:

$$\cos\varphi = \gamma\chi, \quad \sin\varphi = \sqrt{1-\gamma^2\chi^2}. \tag{2.65}$$

Можете проверити, за дато $\gamma = \exp(GM/rc^2) \approx 1/\sqrt{1-2GM/rc^2}$, произвољно $\chi \in \mathbb{C}$ и евентуално $|\gamma\chi| \le 1$, да важи основни тригонометријски идентитет $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Отуда једноставан доказ да важи

$$ds^2 = (\gamma dr)^2 - (\gamma^{-1}cdt)^2 = (dr')^2 - (cdt')^2, \tag{2.66}$$

што је још једна потврда горње теореме.

2.4 Димензије времена

Из теореме 2.3.1 следи нагнутост временске осе у односу на нормалу на правац простирања гравитационог поља. Посебно, ставимо ли $\gamma = 1/\sqrt{1 - GM/rc^2}$ и $\chi = 1$ у (2.64), налазимо тај отклон од нормале ка центру поља за угао φ такав да је:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{GM}{rc^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{GM}{rc^2}}. \tag{2.67}$$

Да би боље разумели смисао овог угла, потсетимо се формуле (1.39) где је брзина v ротације сателита који је на удаљености r од центра масивног тела (масе M) управо сразмерна првом фактору. Према томе, горњи тангенс износи

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{c} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{2.68}$$

а то потсећа на брзину бочног кретања при Лоренцовом слагању брзина (2.15), при $u'_x = 0$ и $u'_y = v$. Централно симетрично гравитационо поље оставља утисак исчашених инерцијалних кретања где је временска оса увек нагнута ка центру, утолико више што је центар гравитације ближе. Према њој је отклоњена и радијална оса простора, за исти угао.

Slika 2.7: Димензије времена, приказ уметника.

То све је посматрано из сопственог система који је изван гравитационог поља, са неког места веома далеког од центра гравитације (када $r \to \infty$). Већ смо рекли да је такав посматрач у 4-дим простор-времену Минковског, са три просторне и само једном временском димензијом. То је простор-време инерцијалних праволинијских кретања једноликим брзинама, којим доминира детерминизам. Оно што се пред њим простире у гравитационом пољу јесу фиксне тачке простора чије су све временске (и просторне) осе нагнуте ка (просторне од) извора поља, са угловима који расту ка центру. Не треба бити велемајстор у геометрији да се схвати да те временске осе (непокретних тачака простора) заузимају различите положаје у неком свом имагинарном временском „простору“ окупирајући више димензија. Штавише, да димензија времена има тачно онолико колико има и димензија простора (три).

За разлику од 6-димензионалног простор-времена целине, поједини сателити који слободно падају (круже около) у гравитационом пољу налазе се у (приближно) инерцијалним системима и према томе су увек ограничени на 4-дим простор-време. Занимљиво

је да Ајнштајнова општа теорија описује само такве путање, те је сва тако спакована у четири димензије да одржава илузију детерминизма класичне механике.

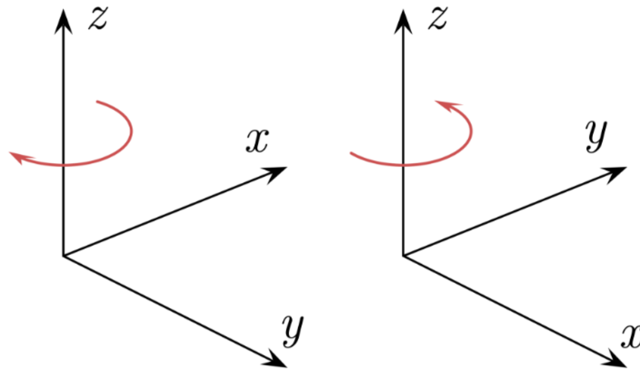
Да бисмо се уверили да тек кретања под дејством сила стварају потребу за додатним димензијама (петом и шестом), размотрићемо систем координата (3-дим простора $Oxyz$) које ротирају око апликате (z осе), константном угаоном брзином ω. Према формулама (2.44), након времена t тачка са координатама $A'(x',y',z')$ покретног имаће координате $A(x,y,z)$ у непокретном систему, при чему је $z = z'$ и важе трансформације:

$$\begin{cases} x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t, \end{cases} \tag{2.69}$$

јер тачка A' кружи око исходишта на удаљености $r = r' = \sqrt{x^2+y^2}$ прелазећи угао $\varphi = \omega t$ након датог времена. Према томе, за јединичне векторе, *ортове* апсцисе, ординате и апликате ових координатних система важе трансформације:

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{i}'\cos\omega t - \vec{j}'\sin\omega t \\ \vec{j} = \vec{i}'\sin\omega t + \vec{j}'\cos\omega t \\ \vec{k} = \vec{k}', \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{i}' = \vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t \\ \vec{j}' = -\vec{i}\sin\omega t + \vec{j}\cos\omega t \\ \vec{k}' = \vec{k}. \end{cases} \tag{2.70}$$

Користимо стрелице за ове базне векторе јер ће нам ускоро понестати ознака.



Slika 2.8: Леви и десни систем координата.

Извод положаја по времену је брзина, па налазимо

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{i} = -\omega\vec{i}'\sin\omega t - \omega\vec{j}'\cos\omega t = -\omega\vec{j} \\ \frac{d}{dt}\vec{j} = \omega\vec{i}'\cos\omega t - \omega\vec{j}'\sin\omega t = \omega\vec{i} \\ \frac{d}{dt}\vec{k} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{i}' = -\omega\vec{i}\sin\omega t + \omega\vec{j}\cos\omega t = \omega\vec{j}' \\ \frac{d}{dt}\vec{j}' = -\omega\vec{i}\cos\omega t - \omega\vec{j}\cos\omega t = -\omega\vec{i}' \\ \frac{d}{dt}\vec{k}' = 0. \end{cases} \tag{2.71}$$

Према томе је

$$\frac{d}{dt}\vec{e} = \vec{\omega} \times \vec{e}, \tag{2.72}$$

где је $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ вектор ротације, а $\vec{e} \in \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

У даљем тексту претпостављамо да имамо десни систем координата $Oxyz$, као на слици 2.8 десно. Поред тога, избегаваћемо примоване ознаке координата и вектора, осим као ознаке извода. Свака другачија употреба биће посебно наглашена.

Потсетимо се вектори:

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}, \quad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \tag{2.73}$$

имају интензитете

$$u = |\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}, \quad u = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{2.74}$$

У Декартовом правоуглом систему координата $Oxyz$ њихов скаларни и векторски производ су, редом:

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = uv\cos\angle(\vec{u},\vec{v}), \\ \vec{u}\times\vec{v} = (u_x v_z - u_z v_y)\vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{k}. \end{cases} \tag{2.75}$$

Први је скалар, други је вектор интензитета $|\vec{u}\times\vec{v}| = uv\sin\angle(\vec{u},\vec{v})$, окомит на оба вектора фактора, са смером одређеним правилом десне руке (десног завртња): када прсти показују смер угла редоследом множења, палац показује смер производа (такође, окретањем завртња у смеру угла завртањ се креће у смеру производа).

Мешовити производ три вектора је

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = (u_x v_z - u_z v_y)w_x + (u_z v_x - u_x v_z)w_y + (u_x v_y - u_y v_x)w_z, \tag{2.76}$$

где је $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$. Помоћу детерминанте трећег реда то исто пишемо

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}. \tag{2.77}$$

Овај производ је скалар чија вредност је једнака оријентисаној запремини паралелепипеда разапетог датим трима векторима, јер је интензитет векторског производ (прва два) вектора једнак површини паралелограма разапетог са два дата фактора.

Троструки векторски производ вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ је

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{w}) - \vec{w}(\vec{u}\cdot\vec{v}), \tag{2.78}$$

што није тешко доказати. Посебно је

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{v}, \tag{2.79}$$

где је *набла* оператор вектор дефинисан са

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}, \tag{2.80}$$

а $f = f(x,y,z)$ је скаларна функција. Овај резултат се назива градијент функције f. Означава се и са $\text{grad}(f) = \nabla f$.

Градијент је вектор компоненти парцијалних извода, па је:

$$\begin{cases} \nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g, \\ \nabla(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\vec{u}\nabla)\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{u} + \vec{u}\times(\nabla\times\vec{v}) + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{u}), \\ \frac{1}{2}\nabla u^2 = \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}) + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}, \end{cases} \tag{2.81}$$

што је такође лако за проверити. Скаларни производ набле оператора и векторске функције $\vec{f} = \vec{f}(x,y,z)$ назива се дивергенција:

$$\text{div}(\vec{f}) = \nabla\cdot\vec{f}. \tag{2.82}$$

Често пишемо кратко $\text{grad}\, f$ и $\text{div}\,\vec{f}$, без заграда.

Пример 2.4.1. *Извести основну једначину кинематике*

$$\frac{d}{dt}\vec{f} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\right]\vec{f}, \tag{2.83}$$

где је $\vec{f}(t) = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ *дата векторска функција, а* $\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)_r$ *је промена функције посматрано из ротирајућег координатног система.*

Решење. Узимањем извода по времену добијамо:

$$\frac{d}{dt}\vec{f}(t) = \frac{d}{dt}(f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}) =$$

$$= (\frac{df_x}{dt}\vec{i} + f_x\frac{d\vec{i}}{dt}) + (\frac{df_y}{dt}\vec{j} + f_y\frac{d\vec{j}}{dt}) + (\frac{df_z}{dt}\vec{k} + f_z\frac{d\vec{k}}{dt})$$

$$= (\frac{df_x}{dt}\vec{i} + \frac{df_y}{dt}\vec{j} + \frac{df_z}{dt}\vec{k}) + \vec{\omega}\times\vec{f}$$

$$= \left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{f}(t),$$

а отуда тражена једнакост. □

Овај резултат се у аналитичкој динамици назива и *транспортна теорема.* Како је брзина неког објекта извод по времену његовог вектора положаја, то је

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}, \tag{2.84}$$

где је $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, па је $\vec{v}_r = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Индекс 0 значи брзину у односу на непокретни систем, а индекс r значи брзину у односу на ротирајући систем. Извод брзине је убрзање, па добијамо:

$$\vec{a}_0 = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_0 = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_0 = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\right]\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{r}\right]. \tag{2.85}$$

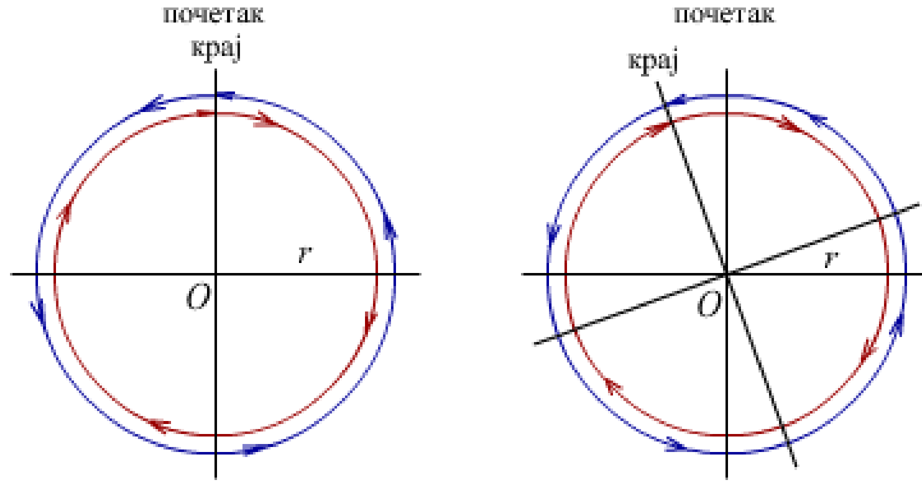
Отуда добијамо

$$\vec{a}_r = \vec{a}_0 - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}, \tag{2.86}$$

где је $\vec{a}_r = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_r$ очигледно убрзање у ротирајућем систему, члан $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ представља *центрифугално убрзање*, док члан $-2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ представља *кориолисово убрзање.*

Кориолисово убрзање због окретања Земље око своје осе окреће воду у сливнику или циклоне, на северној полулопти обрнуто смеру казаљке на сату, а на јужној у смеру казаљке. Појава овог убрзања је разлог зашто систем који ротира не можемо сматрати равноправним са инерцијалнима. Према томе, не очекујемо да су системи који ротирају решења Ајнштајнових једначина поља.

Поред одсуства сила, специфичност инерцијалних система је и константност брзине светлости. Сагњаков[6] ефекат је експериментално откриће из 1913. године да брзина светлости дуж кружнице[7] ротације није иста када се светлост креће у смеру ротације и у обрнутом смеру. Ако су две светлосне зраке послате (почетак) у супротним смеровима (оптичким нитима) дуж фиксиране кружнице полупречника r са центром у исходишту



Slika 2.9: Сагњаков ефекат.

инерцијалног (непокретног) система, оне ће прећи исто растојање истом брзином па ће стићи на крајњу тачку (крај) истовремено. То је приказано на слици 2.9 лево.

На десној страни те слике приказано је шта се догађа ако је путања светлости фиксирана за систем који ротира. Светлост која путује у смеру ротације за исто време прелази мало дужи пут од светлости која путује у супротном смеру, због одмицања саме петље. Када је ω угаона брзина кружне петље којом се креће светлост, тада је тангентна брзина петље $v = \omega r$, па ће збир брзина светлости и онога који мери на крају бити $c \pm v$, при чему је плус за светлост у правцу од ротације, а минус у смеру ротације. Разлика времена доласка те две светлости биће

$$\Delta t = 2\pi r \left(\frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v} \right) = \frac{4\pi r v}{c^2 - v^2} = \frac{4\Pi\omega}{c^2 - v^2}, \tag{2.87}$$

где је $\Pi = \pi r^2$ површина коју затвара петља. То је релативно време посматрача из непокретног система. Са становишта посматрача из покретног система, часовник који се окреће везан за петљу иде спорије са фактором $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, па је сопствено време

$$\Delta t_0 = \frac{4\Pi\omega/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.88}$$

То је време које би измерио посматрач везан за петљу, мирујући на удаљености r од центра ротације.

Различите брзине светлости у два смера кретања дуж поменуте Сагњакове петље су ефекат који би посматрач у систему који ротира могао открити. Због те асиметрије, он би могао знати да се налази у неинерцијалном систему, који је изван разматрања теорије релативности. Та индиција има убедљивост поменутог кориолисовог убрзања, за разлику од рецимо, одбојне центрифугалне силе, осим ако сматрамо дефинитивним да не постоје одбојне гравитационе силе.

У годинама у периоду од објављивања специјалне (1905) па до опште (1916) теорије релативности Ајнштајн се често враћао на анализе система координата који ротирају,

[6] Georges Sagnac (1869-1928), француски физичар.

[7] Сагњак је радио са неколико огледала од којих се светлост одбијала обилазећи центар.

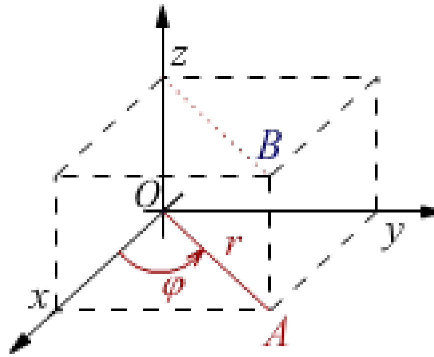
неретко са опречним резултатима. Коначно, он је узео за сигурна два становишта, да систем који ротира није инерцијални у смислу да не мора бити обухваћен решењима његових једначина поља и да се сатови у том систему не могу синхронизовати. У систему који ротира није могуће установити садашњост која би представљала неки тренутак времена који би обухватао исти простор уз непрекидну промену времена на сату са непрекидном променом положаја сата. Да је таква синхронизација могућа у инерцијалним системима, Ајнштајн је доказао већ у свом првом раду из 1905. године.

Помоћу Урисонове дефиниције димензије на почетку ове књиге објашњено је како ерозија, када је последица објективне случајности, указује на бар 6-димензионалност простор-времена. Иста дефиниција је коришћена у књизи „Информација перцепције“ (в. [1]) да би се показало нешто слично за системе координата простор-времена у којима у оквиру четири димензије није могуће синхронизовати сатове. Верујем да нема потребе да та објашњења сада понављам. Оно што би сада могла бити новост то је да из могућности опажања не-константности брзине светлости у вакууму следи не-инерцијалност датог система, па и његова (бар) 6-димензионалност.

Ово последње запажање, са једне стране, упућује нас на закључак да за непокретне тачке простора око гравитационог поља не важи константност брзине светлости, а са друге стране, да су у систему који ротира временске осе нагнуте ка смеровима тангентних брзина ротације, које као и у гравитационом пољу заузимају неки временски имагинарни 3-дим „простор“. Затим, да се на мале (инфинитезималне) околине тих тачака односе релативистичке контракције дужина и дилатације времена. Одемо ли још један корак даље, у цилиндарском систему координата $Or\varphi z$ који се окреће око z осе угаоном брзином ω, требало би да можемо директно написати израз за метрику

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} + r^2 d\varphi^2 + dz^2 - \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 dt^2. \tag{2.89}$$

Ако је последња претпоставка тачна, онда би геодезијске линије са овом метриком морале дати центрифугалну силу. Али питање је да ли би оне могле садржавати и рецимо кориолисова убрзања? Остављам ове теме за неку другу прилику.



Slika 2.10: Цилиндарски систем координата $Or\varphi z$.

Цилиндарски систем координата овде пишемо управо у наведеном редоследу $Or\varphi z$. Са слике 2.10 се види да је $r = \overline{OA}$, $z = \overline{AB}$ и $B(x, y, z)$, па је:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ z = z. \end{cases} \tag{2.90}$$

Диференцирањем налазимо:

$$\begin{cases} dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi \\ dz = dz, \end{cases} \tag{2.91}$$

па квадрирањем и сабирањем излази

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \tag{2.92}$$

То је Лоренцов интервал (равног простор-времена) у цилиндарским координатама.

Градијент и дивергенција у цилиндарским координатама имају облик:

$$\begin{cases} \mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z = \nabla f \\ \mathrm{div}\, \vec{f} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{f}, \end{cases} \tag{2.93}$$

где су $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_z = \vec{k}$ јединични вектори цилиндарских координата, $f = f(r,\varphi,z)$ је скаларна функција, а векторска функција $\vec{f}(r,\varphi,z) = f_r\vec{e}_r + f_\varphi\vec{e}_\varphi + f_z\vec{e}_z$. За сферне координате имамо аналогно:

$$\begin{cases} \mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = \nabla f \\ \mathrm{div}\, \vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta f_\theta)}{\partial\theta} = \nabla\cdot\vec{f}, \end{cases} \tag{2.94}$$

са скаларном $f = f(r,\varphi,\theta)$ и векторском $\vec{f}(r,\varphi,\theta) = f_r\vec{e}_r + f_\varphi\vec{e}_\varphi + f_\theta\vec{e}_\theta$ функцијом.

Анализе разлика инерцијалних од неинерцијалних система и последица, а на начин примене Лоренцових трансформација на ротације, могле би стићи и до разматрања хипотеза о ширењу универзума. Уз претпоставку да се галаксије од нас удаљавају утолико брже што су даље, у сферним координатама $Or\varphi\theta$ можемо[8] писати

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\Omega^2}{1 - \frac{r}{r_u}} - \left(1 - \frac{r}{r_u}\right) c^2 dt^2, \tag{2.95}$$

где је $d\Omega^2 = \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$, а r_u је полупречник универзума. То је слично Шварцшилдовој метрици коју можемо записати и у облику

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\Omega^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2, \tag{2.96}$$

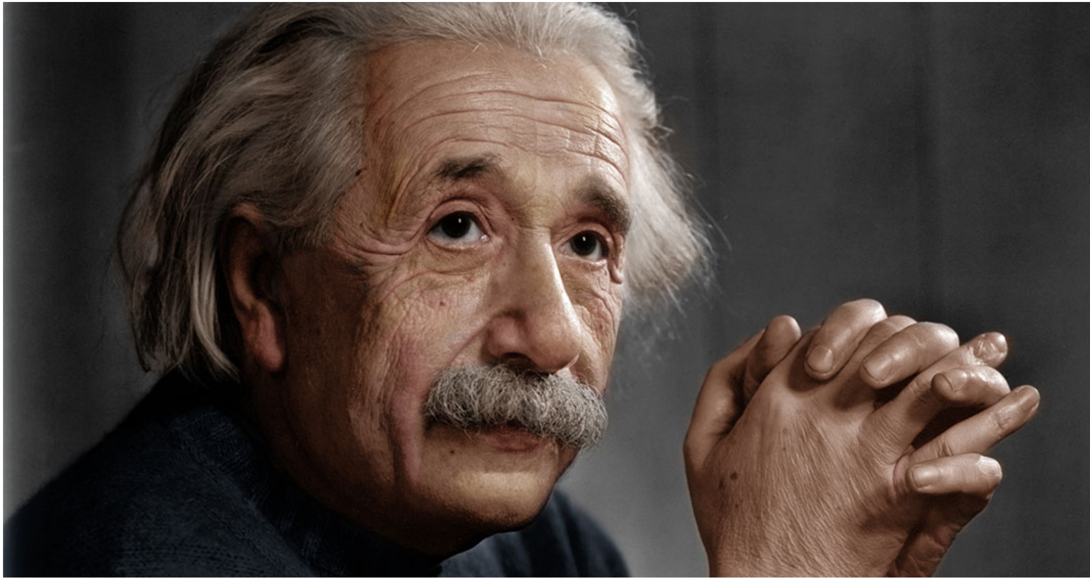
где је $r_s = 2GM/c^2$ Шварцшилдов полупречник, који за Земљу износи око $8,9$ mm, а за Сунце које је $3,3\cdot 10^5$ пута масивније износи око $3,0$ km. То је полупречник тзв. црне рупе масе M.

Свака од поменутих метрика, било да задовољава Ајнштајнове опште једначине поља или не, било да представља физичку реланост или не, у неком је 6-димензионалном простор-времену, при чему су три димензије просторне а три временске.

[8] Приметимо да то није позната метрика, нпр. Фридманова.

2.5 Општа релативност

Ајнштајн је знао рећи: „Ако нешто не умеш да објасниш, онда то и не разумеш". Зачудо, јер тај човек је открио једну од најсложених и најтеже објашњивих теорија егзактних наука уопште. Тензорски рачун, који је у његово време био у зачетку, а данас је постао права мора не само теоријских физичара, приближити чак и бољим студентима математике није уопште једноставна ствар. Па ипак морам покушати објаснити га и лаицима. Зато сам наведену реченицу узео за мото овог наслова.



Slika 2.11: Алберт Ајнштајн, 14.03.1879. - 18.04.1955.

Ајнштајн је 1915. а затим и 1916. године објавио систем једначина:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{2.97}$$

где индекси μ и ν означавају три просторне и једну временску координату. Оно што произилази из тих једначина Ајнштајн је назвао „теоријом поља", али ми то данас радије називамо његовом „теоријом гравитације" или „теоријом релативности". На левој страни једнакости је тензор $G_{\mu\nu}$ који представља (чисту) геометрију, а на десној страни је тензор $T_{\mu\nu}$ који представља материју. Коефицијент између $8\pi G/c^4$ само усклађује физичке димензије та два. Према томе, ове једначине поља имају сасвим просто значење: геометрија простора дефинише физичку материју и обрнуто, материја дефинише простор.

Док је трагао за општом теоријом релативности, Ајнштајн се обратио свом школском другу Гросману[9] за помоћ око учења тензорског рачуна, тада нове области математике. Привукла га је идеја *коваријантности* (и дуално контраваријантности), која је основа тензорског рачуна, а заправо има значење слично принципу релативности. Тензори су такве величине око чијег ће се значења сви посматрачи моћи сложити. Коваријантност је и више од тог пуког компромиса, јер системи бројева које називамо тензорима након трансформација координата у потпуности чувају форму закона којег изражавају. Зато је Ајнштајн код Гросмана тражио да системи бројева $G_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ буду тензори.

[9]Marcel Grossmann (1878-1936), мађарски професор математике.

Њих два су се брзо сложили да на левој страни (2.97) треба стајати неки једноставни тензор који дефинише кривину простора, попут Ричијевог[10] тензора $R_{\mu\nu}$ или његове изведбе која се не би мењала премештањем у простор-времену, јер на десној страни може стајати нека непромењлива планета.

Ричи је до свог тензора дошао настојећи да реши, поједностављено речено, следећи проблем. Ако мрав живи на површини сфере, како он помоћу мерења и израчунавања може сазнати да је његов простор закривљен? Нашао је да би то (углавном) могао бити сложени израз, који је два пута коваријантан тензор

$$R_{ij} = \frac{\partial\Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^{\ell}} - \frac{\partial\Gamma^{\ell}_{i\ell}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{m}_{ij}\Gamma^{\ell}_{\ell m} - \Gamma^{m}_{i\ell}\Gamma^{\ell}_{jm}, \tag{2.98}$$

што значи да и након евентуалне трансформације координата из једног система у други, тај тензор одржава особине две произвољне координате дате доњим индексима. У свету физике то би значило да различити релативни посматрачи имају једнака виђења закривљености простора представљене бројевима (2.98).

Уопште, индекси i, j, ℓ, m означавају редом онолико координата колико актуелна геометрија има димензија. Због Ајнштајнове конвенције о сабирању тензора (сабира се по поновљеном горњем и доњем индексу) формула (2.98) представља систем од 4×4 = 16 парцијалних диференцијалних једначина, од којих се неке понављају. Да ствар буде још сложенија у тим једначинама су Кристофелови[11] симболи

$$\Gamma^{m}_{ij} = \frac{1}{2}g^{mk}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}\right), \tag{2.99}$$

који, успут речено и нису тензори. Тензори $g_{\mu\nu}$ су коефицијенти метрика које смо већ наводили, а које дефинише општи израз

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \tag{2.100}$$

Претходно $(g^{\mu\nu})$ је инверзна матрица матрице $(g_{\mu\nu})$.

Зато што изводи (деривације, промене) Ричијевог тензора $R_{\mu\nu}$ нису нуле, а тензор $T_{\mu\nu}$ на десној страни једначина (2.97) представља стационарну (непромењиву) материју, Ајнштајн је за леву страну тих једначина смислио тензор

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.101}$$

Једноставно речено, према Ајнштајну је требало бити да је $G_{\mu\nu}$ најједноставнији тензор који садржи Ричијев тензор, али који се не мења након (тензорског) диференцирања. Скалар Λ је константа интеграције, која је убрзо добила назив *космолошка константа.* Наравно да се међународна заједница физичара и математичара одмах окомила на Ајнштајна и на његов начин „бруталног скрнављења егзактних наука“ промоцијом овако „склепаних“ једначина. Негативне критике су дошле и од његовог пријатеља Гросмана.

Да ствар буде још гора, Ајнштајн је „намонтирао” и десну страну својих једначина. Он је за $T_{\mu\nu}$ рекао да представља тензор енергије, два пута коваријантан, а пре њега енергија није сматрана чак ни вектором. Тензорске величине без индекса (нултог реда) су скалари, ако оне имају исте вредности за све релативне посматраче. До 20.

[10] Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), италијански математичар и оснивач тензорског рачуна.
[11] Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), немачки математичар и физичар.

века се сматрало да су нпр. температура и енергија засигурно тензори нултог реда. Вектор је тензор првог реда, ако се његове вредности држе и преласком на други систем координата. На пример, оријентисана дуж јесте вектор, али није тензор, јер ће ротацијом променити смер као своју битну одредницу. Напротив, вектори сила које подупиру неку грађевину су тензори, ако та грађевина изгледа једнако стабилном и када је посматрана из различитих система. Тензори другог реда су (неке) матрице, трећег реда су блокови матрица слагани по дубини, и тако даље.

Прогласити енергију два пута коваријантним тензором, почетком 20. века, било је још увек несмотрено али не баш сасвим без основе. Већ је било примећено (2.37) да је енергија четврта компонента вектора импулса (количине кретања). Требало је ствар само обрнути и рећи да су три компоненте вектора импулса заправо просторне компоненте „вектора“ енергије. Затим је требало поверовати да x компонента енергије делује на y компоненту и уопште μ-та на ν-ту интензитетом $T_{\mu\nu}$. Последњи корак, рећи да тензор $T_{\mu\nu}$ представља материју био је због тада познатог $E = mc^2$ лакши.

Данас је тешко сагледати неразумевање Ајнштајна од стране научне заједнице. У то време једва да су људи од науке и чули за нееуклидске геометрије, а још мање за тензорски рачун. Ипак, само месец дана након објављивања опште теорије релативности, немачки физичар и астроном Карл Шварцшилд је дошао до првог тачног решења једначина (2.97), ако не рачунамо тривијално решење за раван простор. Одмах након објављивања свог рада 1916. године, Шварцшилд је умро у Првом светском рату као немачки војник. Мање је познато, али независно и у исто време је и немачки матемаричар Јоханес Дросте[12] (1886-1963) дошао до сличног решења.

Шварцшилдово решење важи за централно симетрична гравитациона поља, попут онога које ствара Сунце, ако занемаримо утицај планета. Зато га има смисла тражити у метрици сличној (2.60), мало општијој (в. [6]).

Пример 2.5.1. *Извести Шварцшилдово метрику (2.61) из (2.97), полазећи од*

$$ds^2 = -e^{2B(r)}c^2dt^2 + e^{2A(r)}\,dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + r^2\,d\theta^2, \tag{2.102}$$

где су $A(r)$ и $B(r)$ непознате функције удаљености r.

Решење. Метрички тензор $(g_{\mu\nu})$ и њему инверзан $(g^{\mu\nu})$ имају матрице, редом:

$$\begin{pmatrix} -e^{2B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -e^{-2B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Користимо обе за израчунавање Кристофелових симбола (2.99). Ставимо $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ и $x^3 = \theta$, па имамо редом:

$$\Gamma^1_{11} = \sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2}g^{1k}\left(\frac{\partial g_{k1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}e^{-2A}\frac{\partial e^{2A}}{\partial r} = \frac{1}{2}e^{-2A}e^{2A}\frac{\partial(2A)}{\partial r} = \frac{\partial A}{\partial r} = A'(r),$$

$$\Gamma^1_{11} = A', \quad \Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{13} = 0, \quad \Gamma^1_{10} = 0.$$

[12] Johannes Droste: `http://www.mathpages.com/home/kmath697/kmath697.htm`

Због симетрије доњих индекса, $\Gamma^m_{ij} = \Gamma^m_{ji}$, непосредно добијамо још три. Даље је:

$$\Gamma^1_{22} = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} g^{1k} \left(\frac{\partial g_{k2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} e^{-2A} \frac{\partial (r^2 \sin^2 \theta)}{\partial r} = -e^{-2A} r \sin^2 \theta,$$

$$\Gamma^1_{33} = -e^{-2A} r, \quad \Gamma^1_{00} = e^{2(B-A)} B'(r),$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{22} = -\sin\theta \cos\theta,$$

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = B'(r),$$

а сви остали су нуле. Затим израчунавамо Ричијев тензор (2.98), редом:

$$R_{11} = \sum_{\ell=0}^3 \left[\frac{\partial \Gamma^\ell_{11}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{1\ell}}{\partial x^1} + \sum_{m=1}^4 \left(\Gamma^m_{11} \Gamma^\ell_{\ell m} - \Gamma^m_{1\ell} \Gamma^\ell_{1m} \right) \right] =$$

$$= \sum_{\ell=0}^3 \left[\frac{\partial \Gamma^\ell_{11}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{1\ell}}{\partial x^1} + \left(\Gamma^1_{11} \Gamma^\ell_{\ell 1} - \Gamma^1_{1\ell} \Gamma^\ell_{11} \right)_{m=1} - (\Gamma^2_{1\ell} \Gamma^\ell_{12})_2 - (\Gamma^3_{1\ell} \Gamma^\ell_{13})_3 - (\Gamma^0_{1\ell} \Gamma^\ell_{10})_0 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{r} A' \right]_{\ell=2} + \left[\frac{1}{r} A' \right]_{\ell=3} + \left[-B'' + A'B' - (B')^2 \right]_{\ell=4},$$

$$R_{11} = -B'' - (B')^2 + A'B' + \frac{2}{r} A',$$

$$R_{22} = \left[1 - e^{-2A} (1 - rA' + rB') \right] \sin^2 \theta,$$

$$R_{33} = 1 - e^{-2A} (1 - rA' + rB'),$$

$$R_{00} = \left[B'' + (B')^2 - A'B' + \frac{2}{r} B' \right] e^{2(B-A)}.$$

Ричијев скалар добијамо контракцијом:

$$R = \sum_{\mu=0}^3 R_{\mu\mu} = -2e^{-2A} \left[B'' + \left(B' + \frac{2}{r} \right) (B' - A') + \frac{1}{r^2} \left(1 - e^{2A} \right) \right].$$

Ови резултати улазе у Ајнштајнов тензор (2.97):

$$G_{11} = \frac{1}{r^2} (1 + 2rB' - e^{2A}),$$

$$G_{22} = r^2 e^{-2A} \left[B'' + \left(B' + \frac{1}{r} \right) (B' - A') \right] \sin^2 \theta,$$

$$G_{33} = r^2 e^{-2A} \left[B'' + \left(B' + \frac{1}{r} \right) (B' - A') \right],$$

$$G_{00} = -\frac{1}{r^2} e^{2(B-A)} \left(1 - 2rA' - e^{2A} \right).$$

За последњи можемо приметити да је

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2B} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-2A} \right) \right],$$

што ће се показати корисно касније. Толико о левој страни једначина поља.

На десној страни (2.97) је тензор енергије[13]. Претпоставићемо да је енергија која генерише гравитацију унутар лопте (планете, звезде) полупречника r_0 са центром у исходишту, са густином $\rho(r)$ унутар лопте и нулом изван. Познато је да је тензор енергије за савршен флуид у термодинамичкој равнотежи облика

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu},$$

где је $\rho = \rho(r)$ густина у килограмима по кубном метру, $P = P(r)$ је хидростатички притисак у паскалима, u_μ су компоненте 4-брзине флуида, а $g_{\mu\nu}$ је метрички тензор. За статичан флуид је $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, па је четврта компонента $(u_0)^2 = c^2 e^{2B}$, што следи из $g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -c^2$. Према томе, тензор енергије има не-нулте компоненте:

$$T_{11} = P e^{2A}, \quad T_{22} = P r^2 \sin^2\theta, \quad T_{33} = P r^2, \quad T_{00} = \rho e^{2B}.$$

Стављајући то све у Ајнштајнову једначину (2.97), за индексе $\mu \ne \nu$ добијамо тривијално $0 = 0$, а за $\mu = \nu = 2$ и $\mu = \nu = 3$ добијамо исту једначину. Занимљиве су само:

$$\begin{cases} \mu\nu = 11: & \frac{1}{r^2}(1 + 2rB' - e^{2A}) = \frac{8\pi G}{c^4} P e^{2A}, \\ \mu\nu = 22: & e^{-2A}\left[B'' + \left(B' + \frac{1}{r} \right)\left(B' - A' \right) \right] = \frac{8\pi G}{c^4} P, \\ \mu\nu = 00: & \frac{1}{r^2} e^{2B} \frac{d}{dr}\left[r\left(1 - e^{-2A} \right) \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \rho e^{2B}. \end{cases}$$

Из четврте (нулте) следи:

$$A(r) = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right), \quad M = \int 4\pi r^2 \frac{\rho(r)}{c^2}\, dr.$$

Узимамо да је $M(0) = 0$. Затим, из $E = mc^2$ следи да је ρ/c^2 густина масе, па $M(r)$ можемо интерпретирати као укупну масу лопте полупречника r.

На крају решавамо прву једначину ($\mu\nu = 11$) када је $r > r_0$. Изван лопте (планете или звезде), маса M је константна, притисак је нула (у вакууму $P = 0$), па имамо:

$$1 + 2rB' - e^{2A} = 0, \quad e^{2A} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1},$$

$$B(r) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \frac{2GM}{r^2 c^2}\, dr = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\, d\left(-\frac{2GM}{rc^2} \right),$$

$$B(r) = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right),$$

$$e^{2B} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}.$$

Према томе, коначно решење за (2.102) је Шварцшилдова метрика (2.61). □

[13] Stress–energy tensor: `https://en.wikipedia.org/wiki/Stress%E2%80%93energy_tensor`

2.6 Тензорски рачун

Иако на први поглед Ајнштајнова теорија и механика уопште немају ништа са принципом вероватноће, то није тачно. Овде ћемо видети како се коваријантност, релативност и принцип вероватноће могу сагледати као различите форме истог садржаја. Прва наведена је важна одредница тензорског рачуна, другу прилично сигурно можемо узети као проверену ствар, а трећа иако (у тренутку док ово пишем) неискориштена у науци, толико је очигледна да се једном схваћена даље тешко може игнорисати. Све три заједно дају бољи увид у начин функционисања наше васионе.

Тела се крећу спонтано тако да се настоје одржати у највероватнијим стањима. То само по себи значи да су сва друга стања у односу на реализовано углавном мање вероватна. Углавном, јер фреквенција реализација изолованих случајних догађаја има малу извесност, која тек са значајним порастом броја понављања догађања све боље репрезентује вероватноћу. То произилази из принципа вероватноће или прецизније речено, из „закона великих бројева“. Зато механика, када уђе у домен макро-физике, може да одржава илузију детерминизма.

Реализације случајних догађаја претварају неизвесност у информацију. Мноштво информација у настајању чини нашу садашњост, а због закона одржања та информација остаје реална као прошлост. Архивирањем уједно настаје и илузија физичког поретка. Васиона је спој материјалног и нематеријалног, конкретног и апстрактног, хаоса и закона, при чему нам оно прво својим мноштвом наглашава оно друго. Недостаје ми бољи израз за „чисто физичку ствар“, али је то за сада и небитно, јер верујем да је она неодвојива од свог начина понашања.

Масовније реализације случајних догађаја, које се одвијају у позадини макро-физике, са једне стране увећавају њену сложеност у односу на микро-физику, али са друге стране резултирају споријм ходом времена. Ово друго произилази из саме дефиниције информације као логаритма вероватноће (1.1), јер је вероватноћа реалан број од нула до један, тако да је информација мања када је исход извеснији. Због веће извесности код већег броја случајева масовнија тела, односно тела са више елементарних честица и већим бројем реализација случајних догађаја, имају извеснија понашања, па и она имају спорији ток времена. У крајњем случају, тамо где због превеликог мноштва догађаја престаје васиона хаоса и случајности, оних заснованих на законима нама важеће теорије вероватноће, тамо престаје производња времена.

То што су вероватноће релативне и што се могу мењати под дејством сила, не мења суштину принципа вероватноће, осим што тај принцип ограничавају на сопствена стања. Последица постојања „правила игре“ за случајне догађаје је и оно што овде називамо принципом ентропије. Ентропију овде не схватамо као „количину нереда“ колико као „количину слободе“ или још тачније као логаритам броја могућности датог стања (1.10). То је одредница Болцмана, касније недоследно користена у физици, нарочито у периоду након открића математичке теорије информације. Постоје разна тумачења ентропије, а овде је битно да ентропија и информација нису једно те исто, мада су веома сличне! Наиме, када би ентропија била тачно оно што је и информација, онда би принципи ентропије и вероватноће били у контрадикцији, јер више информације значи мање вероватноће. Међутим, са изворном Болцмановом дефиницијом (1.10) има смисла поопштавати други закон термодинамике у „принцип ентропије“. Са осталим углавном не.

Тела се крећу спонтано тако да не прелазе на стања ниже ентропије, што већ само по себи најављује да сва друга тела у односу на дато бораве у стању мање ентропије.

Наиме, када би релативна ентропија била једнака или већа од сопствене, тела би спонтано прелазила у друга стања кретања, нарушавајући закон инерције. Дакле став да је ентропија релативног инерцијалног система у кретању нижа од сопственог је мало више од хипотезе.

Из истих разлога је поготово енторпија убрзаног система (на кога делује сила) нижа од инерцијалног сопственог. Ајнштајнови *геодезици* којима тела слободно падају у гравитационом пољу такође су путање константних ентропија, већих од околних (геодезијских линија) простор-времена, а посебно и од (просторно) статичних позиција у пољу у непосредној близини датог тела. Док се не уверимо да постоји данас потпуно непознат закон физике који би то спречио, можемо сматрати да је инерција као и ентропија последица закона вероватноће. Инерција је универзална појава управо зато што је принцип ентропије универзалан.

Ето у чему је принцип ентропије једнак принципу релативности и због чега им обома одговара појам коваријантности тензора. Диференцијални рачун и потреба да се прикаже иста ствар у различитим координатним системима су основе тензорског рачуна. На два различита начина трансформишемо ко и контра-варијантне величине, али у оба начина резултат остаје непромењен, кажемо инваријантан. Ти су начини прихватљиви и за одржање вероватноће, једнако као и за друге природне законе, с тим да сопствене вероватноће (у систему у којем мирујемо) не морају бити једнаке релативнима (у односу на које се крећемо). Када прелазак са једног система координата на други посматрамо као прелазак са једног становишта на друго, настојећи одржати принципе вероватноће и ентропије, а исту тачку третирамо са различитих становишта у односу на два система посматрања, долазимо на метод тензора.

О тензорима има смисла говорити ако имамо бар два система (криволинијских) координата $OX_1 \dots X_n$ и $OY_1 \dots Y_n$ датог простора са $n \in \mathbb{N}$ димензија. Геометријски простор у физици гравитације је простор-време, у квантној механици то може бити поопштени еуклидски простор (са комплексним коефицијентима) чије димензије представљају разне особине честица. Међутим, нека величина може бити тензор само ако се при преласку са једног на други систем, $X \to Y$, трансформише или на коваријантан или на контраваријантан начин.

Кроз следеће примере ћемо објаснити обе врсте тензора, али пре тога нагласимо да тензор може бити скалар, вектор, матрица и уопште величина попут $T^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}$ са доњим (овде i, j, k) и горњим (α, β, γ) индексима. Доњи индекси су коваријантни, горњи су контраваријантни.

Први пример. Скалар је потенцијал ϕ неког поља физичких сила. То је тензор нултог реда, када из различитих система координата може бити виђен на (формално) исти начин. У Декартовом правоуглом систему координата $Oxyz$, померањем $\phi = \phi(x, y, z)$ из тачке $\mathbf{r} = (x, y, z)$ за $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ прираштај ϕ износи

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz = (\nabla\phi) \cdot (d\mathbf{r}). \tag{2.103}$$

Из инфинитезималног рачуна знамо да је први фактор десно градијент, $\operatorname{grad}\phi = \nabla\phi$, који је вектор са правцем, смером и интензитетом најбржег раста потенцијала. Други фактор је вектор датог померања, а њихов скларани производ је скалар $d\phi$ који је максималан када су вектори $\nabla\phi$ и $d\mathbf{r}$ паралелни, а нула ако су окомити.

Даље, у односу на неки други систем $O\xi\eta\zeta$, чије координате се могу изразити помоћу

првог и обрнуто, парцијални изводи датог скалара су:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\xi}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\eta}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\zeta} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\zeta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\zeta}. \end{cases} \tag{2.104}$$

У тензорском рачуну уопште, свака величина која се трансформише попут извода скалара назива се коваријантни тензор првог реда. Са друге стране, диференцијали координата и свака величина која се трансформише на њихов начин:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta, \end{cases} \tag{2.105}$$

назива се контраваријантни тензор.

Други пример. Нека је дат n-димензионални векторски простор са системима координата $Ox_1 \dots x_n$ и $Oy_1 \dots y_n$, којима одговарају базни вектори редом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Иста тачка T се може представити на два начина, координатама $T(x^1, \dots, x^n)$ или $T(y^1, \dots, y^n)$, или векторима $x^\mu \mathbf{a}_\mu$ и $y^\mu \mathbf{b}_\mu$, при чему је $x^\mu \mathbf{a}_\mu = y^\mu \mathbf{b}_\mu$. Подразумева[14] се сабирање по поновљеном индексу $\mu = 1, \dots, n$.

Сваки од тих базних вектора једног система координата представља по једну тачку која се може изразити помоћу базних вектора другог система, тако да је

$$\mathbf{a}_\mu = A_\mu^\nu \mathbf{b}_\nu, \quad \mathbf{b}_\nu = B_\nu^\eta \mathbf{a}_\eta, \tag{2.106}$$

где су A_μ^ν и B_ν^η коефицијенти матрица трансформација $\hat{A}$ и $\hat{B}$, које често означавамо и са (истим) ознакама њихових општих коефицијената. Из датих једначина непосредно следи

$$A_\mu^\nu B_\nu^\eta = \delta_\nu^\eta = \begin{cases} 1, & \nu = \eta \\ 0, & \nu \ne \eta, \end{cases} \tag{2.107}$$

где је δ_ν^η Кронекеров *делта симбол.* За овакве матрице кажемо да су *инверзне*, да је њихов производ јединична матрица, $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}$, која има само јединице на главној дијагонали а све остале коефицијенте нуле.

Како се иста тачка T у ова два система представља на два различита начина, векторима $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то имамо трансформације:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = x^\mu \mathbf{a}_\mu = x^\mu (A_\mu^\nu \mathbf{b}_\nu) = (x^\mu A_\mu^\nu)\mathbf{b}_\nu = (x^\mu A_\mu^\nu)(B_\nu^\eta \mathbf{a}_\eta), \\ \mathbf{y} = y^\nu \mathbf{b}_\nu = y^\nu (B_\nu^\mu \mathbf{a}_\mu) = (y^\nu B_\nu^\mu)\mathbf{a}_\mu = (y^\nu B_\nu^\mu)(A_\mu^\eta \mathbf{b}_\eta), \end{cases} \tag{2.108}$$

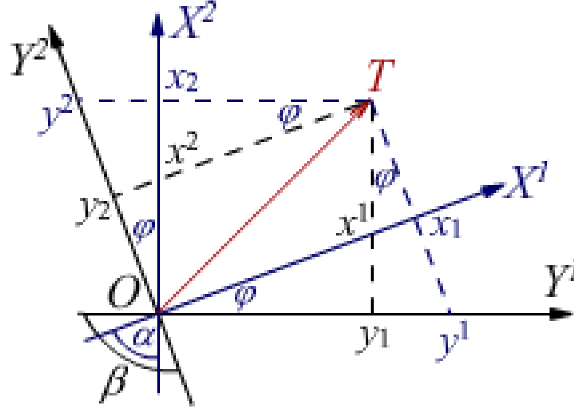
из чега произилази, прво:

$$x^\mu A_\mu^\nu = y^\nu, \quad y^\nu B_\nu^\mu = x^\mu, \tag{2.109}$$

а затим запажамо да се базни вектори трансформишу једном матрицом, координате другом. На један начин се трансформишу вектори базе, на инверзан се трансформишу координате, па кажемо да су базни вектори коваријантни тензори првог реда, а координате да су контраваријантни. Базне векторе означавамо доњим, а координатне векторе горњим индексима. Оба та вектора су тензори првог реда, први коваријантан, други контраваријантан.

[14] Ова понављања су ради лакшег читања на прескок.

Трећи пример. Посматрајмо два косоугла координатна система OX^1X^2 и OY^1Y^2 тако да је $Y^1 \perp X^2$ и $Y^2 \perp X^1$ и тачку T, као на слици 2.12. У сваком од система, координате које су паралелне са одговарајућим осама другог система имају доње индексе (коваријантне су), а координате паралелне са осама сопственог система имају горње индексе (контраваријантне су). Угао између оса првог система је $\alpha = \angle X^1OX^2$, а угао између оса другог $\beta = \angle Y^1OY^2$. Угао између одговарајућих оса два система је $\varphi = \angle X^1OY^1 = \angle X^2OY^2$.



Slika 2.12: Коваријантне T_μ и контраваријантне T^μ координате.

Према датим условима је $\alpha + \beta = \pi$ и $\varphi = (\beta - \alpha)/2$. Такође је:

$$\begin{array}{ll} x_1 = y^1 \cos\varphi & x_2 = y^2 \cos\varphi \\ y_1 = x^1 \cos\varphi & y_2 = x^2 \cos\varphi, \end{array} \tag{2.110}$$

што значи да су коваријантне компоненте у односу на X координате исте до фактора $\cos\varphi$ са контраваријантним компонентама у односу на координате Y, и обрнуто. Зато за ове системе кажемо да су *дуални*. Коваријантни и контраваријантни тензори су дуални. Са исте слике 2.12 налазимо:

$$\begin{array}{ll} x_1 - x^1 = x^2 \sin\varphi & x_2 - x^2 = x^1 \sin\varphi \\ y^1 - y_1 = y^2 \sin\varphi & y^2 - y_2 = y^1 \sin\varphi. \end{array} \tag{2.111}$$

Приметимо, када је мањи угао између оса, $\alpha < \beta$, контраваријантне координате су мање од коваријантних, и обрнуто.

Комбинујући претходне системе налазимо:

$$\begin{array}{l} y^1 = x^1 \cos\varphi + y^2 \sin\varphi \\ y^2 = y^1 \sin\varphi + x^2 \cos\varphi, \end{array} \tag{2.112}$$

а отуда контраваријантне трансформације:

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{\cos\varphi} y^1 - \operatorname{tg}\varphi\, y^2 \\ x^2 = -\operatorname{tg}\varphi\, y^1 + \frac{1}{\cos\varphi} y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y^1 = \frac{1}{\cos\varphi} x^1 + \operatorname{tg}\varphi\, x^2 \\ y^2 = \operatorname{tg}\varphi\, x^1 + \frac{1}{\cos\varphi} x^2. \end{cases} \tag{2.113}$$

Квадрат интензитета датог вектора $\ell^2 = |\overrightarrow{OT}|^2$ налазимо посматрајући ℓ као хипотенузу правоулог троугла Oy_1T:

$$\ell^2 = (y^1)^2 + (x^2)^2,$$

$$\ell^2 = \left(\frac{1}{\cos\varphi}\,x^1 + \operatorname{ctg}\varphi\, x^2\right)^2 + (x^2)^2, \quad \ell^2 = (y^1)^2 + \left(-\operatorname{tg}\varphi\, y^1 + \frac{1}{\cos\varphi}\,y^2\right)^2,$$

па узмемо ли у обзир $\varphi = \pi/2 - \alpha = \beta - \pi/2$, резултати су:

$$\begin{cases} \ell^2 = [(x^1)^2 + 2\cos\alpha\, x^1x^2 + (x^2)^2]/\sin^2\alpha, \\ \ell^2 = [(y^1)^2 + 2\cos\beta\, y^1y^2 + (y^2)^2]/\sin^2\beta. \end{cases} \tag{2.114}$$

Отуда се лако види да у општем случају, када Питагорина теорема гласи

$$\ell^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu, \tag{2.115}$$

да коефицијенти уз мешовите производе $\mu \ne \nu$ исчезавају ако и само ако је $\cos\alpha = 0$, тј. $\alpha = \pi/2$, дакле када су координате датог система узајамно окомите. То поопштавамо на инфинитезималне делове криволинијских координата. Сваки за себе од три система координата, правоугли Декартов $Oxyz$, цилиндарски $Or\varphi z$ и сферни $Or\varphi\theta$ имају узајамно окомите координате. Зато њихови *метрички тензори* немају међу сабирцима мешовитих фактора:

$$\begin{cases} d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \\ d\ell^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2. \end{cases} \tag{2.116}$$

Одговарајућа метрика простор-времена је $ds^2 = d\ell^2 - c^2dt^2$.

Коефицијенти $g_{\mu\nu}$ метрике (2.115) чине матрицу која је тензор другог реда. Да је то тензор два пута коваријантан видимо из начина трансформације (2.104). Наиме, из $x^\mu = x^\mu(y^1, \dots, y^n)$ следи:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^k}dy^k, \quad dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}dy^j,$$

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}dy^k dy^j,$$

$$d\ell^2 = g_{kj}dy^k dy^j,$$

а отуда

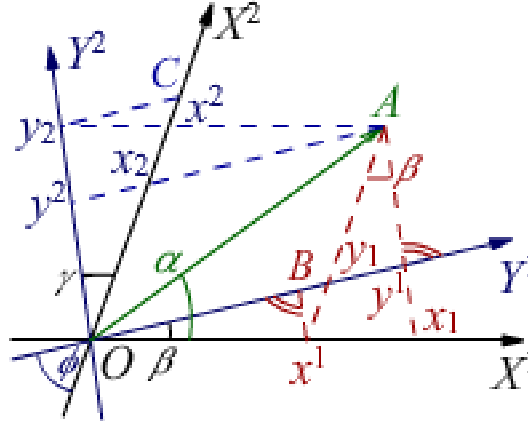
$$g_{kj} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}, \tag{2.117}$$

што значи да је $g_{\mu\nu}$ заиста два пута коваријантан тензор.

Четврти пример. Посматрајмо два косоугла система координата OX^1X^2 и OY^1Y^2 и тачку A, на слици 2.13. Контраваријантне координате дате тачке, $x^1 \in X^1$ и $y^1 \in Y^1$ су такве да је $Ax^1 \| X^2$ и $Ay^1 \| Y^2$. Коваријантне координате $x_1 \in X^1$ и $y_1 \in Y^1$ су такве да је $Ax_1 \| Y^2$ и $Ay_1 \| X^2$. Тачка $B \in Y^1$ је таква да је $Bx^1 \| Y^2$. Углови између оса су $\beta = \angle X^1OB$, $\phi = \angle BOX^2$ и $\gamma = \angle X^2OY^2$, док је нагиб вектора $\overrightarrow{OA}$ према провој оси првог система $\alpha = \angle X^1OA$.

Са слике и на основу синусне теореме за троуглове добијамо:

$$\overline{Oy^1} = \overline{OB} + \overline{By^1} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle x^1}\,\overline{Ox^1} + \frac{\sin\beta}{\sin\angle B}\,\overline{x^1A}, \tag{2.118}$$



Slika 2.13: Контраваријантне координате A^μ.

при томе је $\angle B = \phi + \gamma$ и $\angle x^1 = 180° - (\beta + \phi + \gamma)$. Приметимо да је $\overline{Oy^1} = y^1$ и $\overline{Ox^1} = x^1$, а да је $\overline{x^1 A} = x^2$, па је:

$$y^1 = \frac{\sin(\phi+\gamma)}{\sin(\beta+\phi+\gamma)} x^1 + \frac{\sin\beta}{\sin(\phi+\gamma)} x^2. \tag{2.119}$$

При томе је:

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\sin(\phi+\gamma)}{\sin(\beta+\phi+\gamma)}, \quad \frac{\partial y^1}{\partial x^2} = \frac{\sin\beta}{\sin(\phi+\gamma)}, \tag{2.120}$$

односно

$$y^1 = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial y^1}{\partial x^2} x^2. \tag{2.121}$$

Упоређивањем са (2.105) видимо да су x^1, x^2 и y^1 заиста компоненте контраваријантног тензора. На сличан начин потврђујемо и контраваријантност друге координате.

Са друге стране, на истој на слици 2.13, уочимо паралелограм Oy^1Ay^2 подељен дијагоналом OA на два троугла, па на њих применимо синусну теорему:

$$\frac{y^1}{\sin(\beta+\phi+\gamma-\alpha)} = \frac{y^2}{\sin(\alpha-\beta)}. \tag{2.122}$$

Ово y^1 сменимо у (2.119), да нађемо одговарајућу трансформацију за y^2, из које произилази друга контраваријантна трансформација

$$y^2 = \frac{\partial y^2}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} x^2, \tag{2.123}$$

која иде у пару са (2.121).

Пети пример. Коваријантне компоненте вектора се дефинишу трансформацијама

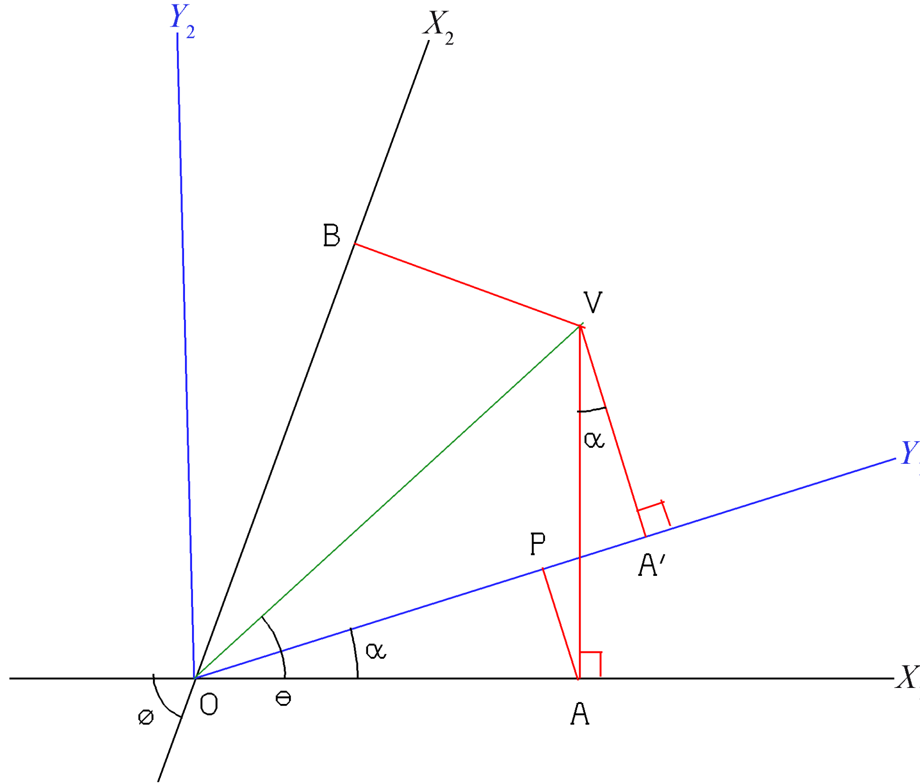
$$y_\nu = \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu} x_\mu. \tag{2.124}$$

за онолико индекса μ и ν колико има координата. У равни, за по две координате, имаћемо:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial x^2}{\partial y_1} x_2, \\ y_2 = \frac{\partial x_1}{\partial y_2} x_1 + \frac{\partial x^2}{\partial y_2} x_2. \end{cases} \tag{2.125}$$

Покажимо сликом[15] да су коваријантне координате паралелне осама другог система.

На слици 2.14 у косоуглим системима координата OX_1X_2 и OY_1Y_2 имамо тачку V која дефинише вектор $\overrightarrow{OV}$. Интензитет тог вектора је $v = |\overrightarrow{OV}|$, нагиб према првој и другој апсциси редом $\angle X_1OV = \theta$ и $\angle Y_1OV = \theta - \alpha$, а окомите пројекције на прве осе су у тачкама $A \in X_1$ и $B \in Y_1$, тако да је $OA = x_1$ и $OB = y_1$.



Slika 2.14: Коваријантне координате V_μ.

Са слике читамо:

$$\overline{OV} = \frac{x_1}{\cos\theta} = \frac{y_1}{\cos(\phi-\theta)} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{y_1}{x_1} - \cos\phi}{\sin\phi}.$$

Затим имамо:

$$y_1 = \overline{OA'} = \overline{OP} + \overline{PA'} = x_1\cos\alpha + \overline{VA}\sin\alpha = x_1\cos\alpha + v\sin\theta\sin\alpha,$$

$$y_1 = x_1\cos\alpha + y_1\frac{\sin\theta\sin\alpha}{\cos(\phi-\theta)},$$

$$y_1 = x_1\cos\alpha + x_1\sin\alpha\frac{\frac{y_1}{x_1} - \cos\phi}{\sin\phi} = x_1(\cos\alpha - \operatorname{ctg}\phi\sin\alpha) + y_1\frac{\sin\alpha}{\sin\phi},$$

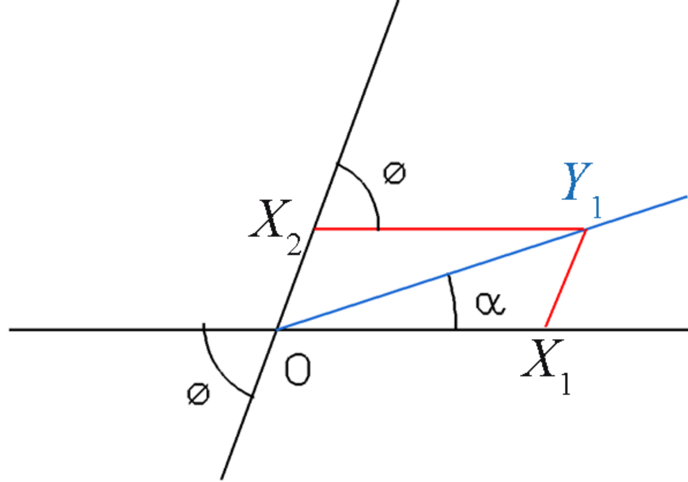
$$y_1 = x_1\frac{\sin(\phi-\alpha)}{\sin\phi} + y_1\frac{\sin\alpha}{\sin\phi}. \tag{2.126}$$

[15]Projective geometry: `http://nct.goetheanum.org/`

Посматрајмо сада паралелограм на слици 2.15. Ако је $\overline{OX_1} = \delta x_1$ и $\overline{OX_2} = \delta x_2$, помоћу синусне теореме за инфинитезимални троугао OX_1Y_1 добијамо:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\delta x_1}{\delta y_1} = \frac{\sin(\phi - \alpha)}{\sin\phi}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{\delta x_2}{\delta y_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\phi}, \tag{2.127}$$

што значи да је (2.126) исто што и (2.124), а то је оно што је и требало показати.



Slika 2.15: Варијације координата.

Шести пример. Скаларни производ вектора силе $\mathbf{F}$ и пређеног пута $\mathbf{s}$ је рад $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$. Да би добили скалар A сабирамо производе одговарајућих компоненти два вектора, али не било каквих. Сабирамо производе контраваријантних првог и коваријантних одговарајућих компоненти другог вектора, јер би иначе добили погрешан резултат.

Да је тако добијени рад тензор нултог реда видимо на следећи начин. При преласку из система координата $X \to \bar{X}$ имамо:

$$A = F^\mu s_\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}_\nu}\bar{F}^\nu\right)\left(\frac{\partial \bar{x}^\eta}{\partial x^\mu}\bar{s}_\eta\right)$$

$$= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}_\nu}\frac{\partial \bar{x}^\eta}{\partial x^\mu}\right)\bar{F}^\nu \bar{s}_\eta = \delta^\nu_\eta \bar{F}^\nu \bar{s}_\eta = \bar{F}^\nu \bar{s}_\nu = \bar{A}.$$

Отуда

$$A = \bar{A}, \tag{2.128}$$

што значи да је рад инваријанта трансформација, када је тензор нултог реда.

Уопште, тензор дефинише скуп функција својим трансформацијама координата. То морају бити или коваријантне или контраваријантни трансформације. Други начин препознавања тензора је множење скупа функција тензором, па ако је резултат тензор, онда су то и дате функције. Међутим, те функције могу изгледати једноставније у једном систему координата, него у неком другом. На пример, радијално гравитационо поље је боље представљати у сферним, или у 2-дим простору у поларним, координатама него у Декартовим.

2.7 Кристофелови симболи

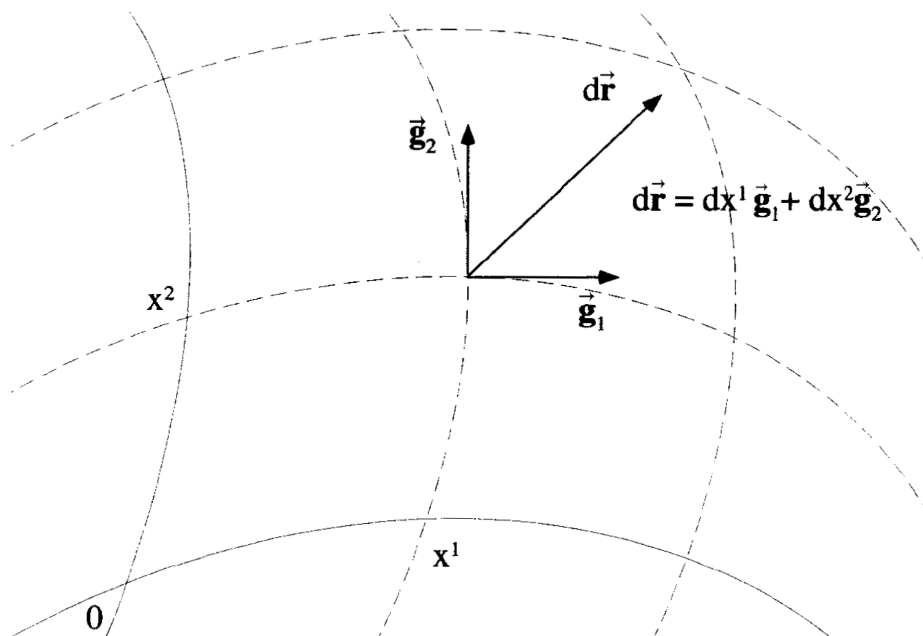
Постоје веома важне величине за рад са тензорима, а које нису тензори. Једна од таквих долази од *коваријантне деривације* вектора $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)$, дефинисане са

$$\nabla_\mu v^\eta = \frac{\partial v^\eta}{\partial x^\mu} + v^\nu \Gamma^\eta_{\nu\mu}. \tag{2.129}$$

Ова формула је често основа за извођење Кристофелових симбола $\Gamma^\eta_{\nu\mu}$.

Коваријантна деривација прати паралелни транспорт вектора. Када су $v^\mu(A_1)$ и $v^\mu(A_2)$ вредности векторског поља на местима A_1 и A_2, у криволинијским координатама неког простора, оне нису увек директно упоредиве. Рецимо, није могуће дефинисати један вектор који би показивао смер севера за све векторе сфере, па чак нити за векторе на различитим географским ширинама једног меридијана. За њихово упоређивање потребно је дефинисати неку процедуру, попут оне коју називамо коваријантном деривацијом.

Део те процедуре, *паралелни транспорт*, састоји се у следећем. Узмемо вектор $\mathbf{v}$ у тачки A_1 и померамо га паралелно самом себи, мало по мало дуж неке криве α која спаја A_1 и A_2, све док га не преместимо у тачку A_2. Затим, сматрамо паралелним у односу на криву α било која два вектора која су у тачкама A_1 и A_2, а имају исти правац са вектором $\mathbf{v}$.



Slika 2.16: Криволинијске координате Ox^1x^2.

Ради појашњења[16], размотримо криволинијске координате 2-дим система са слике 2.16. Вектор померања

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} dx^2, \tag{2.130}$$

можемо писати

$$d\vec{r} = \vec{g}_1 dx^1 + \vec{g}_2 dx^2. \tag{2.131}$$

[16]Wiley Online Library: `http://onlinelibrary.wiley.com/`

где су

$$\vec{g}_\mu = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\mu}, \tag{2.132}$$

коваријантни вектори базе, који су функције положаја. На тај начин дефинишемо:

$$\nabla\phi = \vec{g}^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, \quad \nabla = \vec{g}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{2.133}$$

криволинијски *градијент* и *дел* оператор, редом. Парцијална деривација $\partial\phi/\partial x^\mu$ је μ-та коваријантна компонента вектора градијента. Приметимо да при томе сам вектор коваријантне базе, $\vec{g}^\mu$, није диференциран.

Слично дел оператору, дефинишемо дивергенцију векторског поља са:

$$\nabla\cdot\vec{v} = \vec{g}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\cdot(v^\nu \vec{g}_\nu) = \nabla\cdot\vec{v} = \vec{g}^\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu}(v^\nu \vec{g}_\nu). \tag{2.134}$$

Када базни вектори нису константе, десни израз чине два члана

$$\nabla\cdot\vec{v} = \vec{g}^\mu \cdot \left[\left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu}\right)\vec{g}_\nu + v^\nu \left(\frac{\partial \vec{g}_\nu}{\partial x^\mu}\right)\right]. \tag{2.135}$$

Последњи количник се обично дефинише помоћу Кристофелових симбола:

$$\frac{\partial \vec{g}_\nu}{\partial x^\mu} = \Gamma^\eta_{\nu\mu}\vec{g}_\eta. \tag{2.136}$$

Ово захтева да резултат диференцирања на левој страни једнакости мора бити вектор изражен помоћу збира коваријантних базних вектора $\vec{g}_\eta$.

Да бисмо израчунали Кристофелове симболе, последњу једначину множимо скаларно са обе стране

$$\vec{g}^\sigma \cdot \frac{\partial \vec{g}_\nu}{\partial x^\mu} = \Gamma^\eta_{\nu\mu}(\vec{g}^\sigma\cdot\vec{g}_\eta), \tag{2.137}$$

па добијамо

$$\Gamma^\sigma_{\nu\mu} = \vec{g}^\sigma \cdot \frac{\partial \vec{g}_\nu}{\partial x^\mu}, \tag{2.138}$$

јер је $\vec{g}^\sigma\cdot\vec{g}_\eta = \delta^\sigma_\eta$. Базни вектори су још увек изводи положаја (2.132), па Кристофелови симболи постају

$$\Gamma^\sigma_{\nu\mu} = \vec{g}^\sigma \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^\nu \partial x^\mu}. \tag{2.139}$$

Из ове једначине следи да су Кристофелови симболи симетрични на доње индексе

$$\Gamma^\sigma_{\nu\mu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}. \tag{2.140}$$

Једначина (2.139) није најкориснија за налажење Кристофелових симбола, ако не познајемо зависност положаја од координата.

Даље настављамо помоћу метрике

$$g_{\nu\mu} = \vec{g}_\nu \cdot \vec{g}_\mu, \tag{2.141}$$

којом дефинишемо нови скуп функција:

$$\Gamma_{\eta\nu\mu} = g_{\eta\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\mu}. \tag{2.142}$$

Величине $\Gamma_{\eta\nu\mu}$ називамо Кристофелови симболи прве врсте, док величине $\Gamma^{\eta}_{\nu\mu}$ називамо Кристофелови симболи друге врсте. Приметимо да због(2.140) симболи прве врсте имају симетрију последња два индекса

$$\Gamma_{\eta\nu\mu} = \Gamma_{\eta\mu\nu}. \tag{2.143}$$

Даље, због (2.138) имамо:

$$\Gamma_{\eta\nu\mu} = g_{\eta\sigma}\vec{g}^{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{g}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \vec{g}_{\eta} \cdot \frac{\partial \vec{g}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}. \tag{2.144}$$

Деривације метрике

$$\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\eta}} = \vec{g}_{\nu} \cdot \left(\frac{\partial \vec{g}_{\mu}}{\partial x^{\eta}}\right) + \left(\frac{\partial \vec{g}_{\nu}}{\partial x^{\eta}}\right) \cdot \vec{g}_{\mu}, \tag{2.145}$$

сада можемо писати помоћу Кристофелових симбола

$$\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\eta}} = \Gamma_{\nu\mu\eta} + \Gamma_{\mu\nu\eta}. \tag{2.146}$$

Слично налазимо:

$$\frac{\partial g_{\nu\eta}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma_{\nu\eta\mu} + \Gamma_{\eta\nu\mu}, \tag{2.147}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\eta}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma_{\mu\eta\nu} + \Gamma_{\eta\mu\nu}. \tag{2.148}$$

Сабирањем једначина (2.148) и (2.147), па одузимањем (2.146) и кориштењем симетрија Кристофелових симбола, добијамо

$$\Gamma_{\eta\nu\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\eta}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\eta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\eta}}\right). \tag{2.149}$$

Множење метриком диже први индекс и добијамо

$$\Gamma^{\eta}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\eta\sigma}\left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}}\right). \tag{2.150}$$

То је Кристофелов симбол друге врсте изражен помоћу парцијалних извода метрике.

Дивергенцију (2.135) сада можемо писати

$$\nabla \cdot \vec{v} = \vec{g}^{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(v^{\nu}\vec{g}_{\nu}) = \vec{g}^{\mu} \cdot \left(\frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\vec{g}_{\nu} + v^{\nu}\Gamma^{\eta}_{\nu\mu}\vec{g}_{\eta}\right). \tag{2.151}$$

Израз у последњој загради десно је коваријантна деривација вектора, која може бити писана као

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(v^{\nu}\vec{g}_{\nu}) = \left(\frac{\partial v^{\eta}}{\partial x^{\mu}} + v^{\nu}\Gamma^{\eta}_{\nu\mu}\right)\vec{g}_{\eta}. \tag{2.152}$$

Када су базни вектори константе, тада су сви $\Gamma^{\eta}_{\nu\mu} = 0$, па коваријантна деривација постаје једноставно

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(v^{\nu}\vec{g}_{\nu}) = \left(\frac{\partial v^{\eta}}{\partial x^{\mu}}\right)\vec{g}_{\eta}, \tag{2.153}$$

што је и очекивано.

Ротор вектора се може дефинисати на сличан начин

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{g}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \times (v^{\nu}\vec{g}_{\nu}), \tag{2.154}$$

што можемо писати
$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v^\eta}{\partial x^\mu} + v^\nu \Gamma^\eta_{\nu\mu} \right) (\vec{g}_\mu \times \vec{g}_\eta), \tag{2.155}$$
помоћу коваријантних деривација.

Израчунавање Кристофелових симбола може бити компликован посао, јер већ за површи димензије 2, број тих симбола је $2 \times 2 \times 2 = 8$, али због симетрије, највише 6. За простор-време димензије 4, број симбола је $4^3 = 64$, што симетрија смањује на 40.

Пример 2.7.1. *Изачунати Кристофелове симболе за Декартов систем.*

Решење. У правоуглом Декартовом систему $Oxyz$ индекси су $\mu, \nu \in \{x, y, z\}$. Питагорина теорема гласи
$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
па је коваријантни метрички тензор:
$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Сви изводи овог тензора су нуле и сви Кристофелови симболи су нуле. □

Пример 2.7.2. *Изачунати Кристофелове симболе за поларне и цилиндарске координате.*

Решење. У цилиндарским координатама је $\mu, \nu \in \{r, \varphi, z\}$, а Питагорина теорема
$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$
па су метрички тензори:
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}.$$
Деривације ($\partial_x g_{yz} = \partial g_{yz}/\partial x$) првог су:
$$\partial_r g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2r \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Затим израчунавамо:
$$\Gamma^r_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}, \quad \Gamma^\varphi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & r^{-1} \\ r^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$
У случају 3-дим цилиндарског система $Or\varphi z$ горњим 2-дим матрицама $\Gamma^r_{\mu\nu}$ и $\Gamma^\varphi_{\mu\nu}$ треба додати нуле у трећем ретку и трећој колони. Сви $\Gamma^z_{\mu\nu}$ су нуле. □

Из (2.136) следе:
$$\begin{cases} \partial_r \vec{g}_r = \Gamma^\eta_{rr} \vec{g}_\eta = 0, & \partial_\varphi \vec{g}_r = \Gamma^\eta_{r\varphi} \vec{g}_\eta = \frac{1}{r} \vec{g}_\varphi, \\ \partial_r \vec{g}_\varphi = \Gamma^\eta_{rr} \vec{g}_\eta = \frac{1}{r} \vec{g}_\varphi, & \partial_\varphi \vec{g}_\varphi = \Gamma^\eta_{r\varphi} \vec{g}_\eta = -r\vec{g}r, \end{cases}$$
деривације базних вектора $\vec{g}_r$, $\vec{g}_\varphi$ и $\vec{g}_z$. Остале су нуле.

Пример 2.7.3. *Изачунати Кристофелове симболе за сферни систем.*

Решење. У сферном систему узимамо редослед за индексе r, φ, θ. Угао између апсцисе и пројекције радијус вектора положаја на раван Oxy је φ, а отклон радијус вектора од z осе је θ. Питагорина теорема је

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2,$$

па су коваријантни и контраваријантни метрички тензори:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (r\sin\theta)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \end{pmatrix}. \tag{2.156}$$

Кристофелови симболи другог реда су:

$$\Gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{pmatrix}, \quad \Gamma^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1/r & 0 \\ 1/r & 0 & \operatorname{ctg}\theta \\ 0 & \operatorname{ctg}\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/r \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исто добијамо стављајући $A = 0$ у примеру 2.5.1. Када је $\theta = \pi/2$ добијамо поларне координате и симболе из претходног примера. □

Када просторним координатама dx_1, dx^2 и dx^3 придружимо време $dx^0 = icdt$, тада узимамо у обзир и производњу информације, односно садашњости. Тачка постаје догађај $\vec{s}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ у датом тренутку на датом месту, а вектор померања (2.130) добија продужен облик

$$d\vec{s} = \frac{\partial\vec{s}}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad \mu \in \{0, 1, 2, 3\}. \tag{2.157}$$

Као (2.131), тај вектор можемо писати

$$d\vec{s} = \vec{g}_\mu dx^\mu, \tag{2.158}$$

где су коваријантни вектори базе $\vec{g}_\mu$ опет облика (2.132), с тим што сада имамо четири координате. Како је интервал простор-времена облика

$$ds^2 = d\vec{s} \cdot d\vec{s} = \vec{g}_\mu \cdot \vec{g}_\nu dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.159}$$

то мешовити производи са четвртом координатом морају исчезавати, тј. $g_{0k} = 0$, за $k = 1, 2, 3$, јер би ти сабирци били имагинарни. Према томе, време је окомито на сваку просторну координату, па интервал простор-времена можемо писати

$$ds^2 = d\ell^2 - g_{00}\, c^2 dt^2, \tag{2.160}$$

потпуно раздвајајући простор од времена.

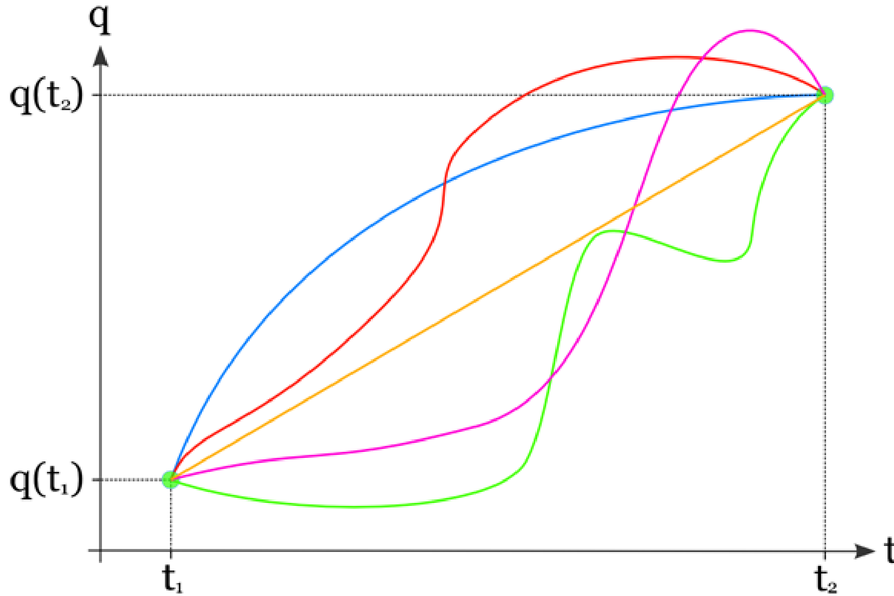
Са друге стране гледајући, када би време свугде текло истом једноликом брзином, тада би испред cdt била константа која одређује јединицу времена, коју би увек могли бирати тако да буде $g_{00} = 1$. Вероватноће, информација и ентропија би свугде били једнаки и не би било сила. Када се појаве силе, тада постоје убрзања и уопште кретања, а са тиме и различите вредности коефицијента g_{00}. Променљивост тог коефицијента указује на присуство поља сила у датом простор-времену. Непосредно из (160) следи да мање g_{00} значи спорије протицање времена, а са становишта наших хипотеза, то значи места мањих слобода или веће концетрација догађаја.

2.8 Геодезијске линије

Принцип најмањег дејства[17] физике најкраће речено гласи: „природа је лења“. Од Њутнове класичне механике преко Ајштајнове опште релативности па до Шредингерове квантне теорије поља, свака значајнија теорија била је поново формулисана помоћу овог принципа, редом од стране Ојлера, Хилберта или Фејмана[18]. Дејство је та централна величина, у јединицама енергије множене временом.

Наша васиона је максимално ефикасна, на начин да за своја дејства троши минимум енергије и времена. Прецизније речено, интеграл дејства током било ког временског периода је минималан, узимано по различитим путањама између два дата догађаја. Ојлер и Лагранж су открили да се из тог принципа може извести сва Њутнова физика, а затим је са открићем теорије релативности, поред времена у такво интегрирање укључен и простор.

Када имамо систем од N честица у простору, свака са 3 координате, треба нам $3N$ бројева за дефинисање свих положаја. Кажемо да систем има $3N$ степени слободе. Сваки такав скуп вредности q који одређује позицију система N честица називамо генералисаним координатма система.



Slika 2.17: Хамилтонов принцип најмањег дејства.

На слици 2.17 видимо пет различитих путања система $q(t)$ од тренутка t_1 до t_2, свака са различитим дејством. Хамилтонов принцип тврди да ће стварна путања бити она за коју је дејство најмање (или највеће), а дејство је интеграл по времену Лагранжове[19] функције, лагранжијана $\mathcal{L} = E_k - E_p$, тј. разлике кинетичке и потенцијалне енергије:

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt. \tag{2.161}$$

[17] Principle of least action: `https://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_least_action`
[18] Richard Feynman (1918-1988), амерички теоријски физичар.
[19] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), италијански математичар.

Област интеграције је временски интервал у току којег посматрамо кретање, а екстремну вредност тражимо помоћу варијационог рачуна. Овде приметите да кретање путањама оптималног дејства можемо тумачити и као кретање путањама максималне ентропије, или путањама максималних вероватноћа.

Пример 2.8.1. *Показати да принцип најмањег дејства за систем у пољу доводи до истог резултата као и други Њутнов закон:*

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}. \tag{2.162}$$

Решење. Узмимо да се тело креће дуж апсцисе. У класичној механици, кинетичка енергија тела је полупроизвод његове масе m и квадрата брзине

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{2.163}$$

Када постоје варијације положаја x за ξ, дејство (2.161) је:

$$\mathcal{S}(x+\xi) = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - E_p(x+\xi)\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{m}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - E_p(x+\xi)\right]dt.$$

Потенцијал развијамо у Тејлоров ред

$$E_p(x+\xi) = E_p(x) + \xi E_p'(x) + \frac{1}{2}\xi^2 E_p''(x) + \dots, \tag{2.164}$$

па добијамо

$$\mathcal{S}(x+\xi) = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - E_p(x) + m\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt} - \xi E_p'(x) + \dots\right]dt. \tag{2.165}$$

Разлику $\delta\mathcal{S} = \mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(\xi)$ називамо варијацијом дејства. Када су варијације положаја толико мале да их све осим прве апроксимације можемо занемарити, добијамо:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt} - \xi E_p'(x)\right]dt =$$

$$= m\frac{dx}{dt}\xi(t)\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)dt - \int_{t_1}^{t_2}E_p'(x)\xi(t)\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[-m\frac{d^2x}{dt^2} - E_p'(x)\right]\xi(t)\,dt.$$

Варијација дејства $\delta\mathcal{S}$ је најмања када исчезава, тј. када је израз у загради нула. Тако добијамо

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + E_p'(x) = 0, \tag{2.166}$$

а то је Њутнов закон $F = ma$. □

Лагранжова функција $\mathcal{L} = E_k - E_p$ у општем случају зависи од генералисаних координата система $q(t)$, брзина $\dot{q}(t)$ и времена t, тако да можемо писати

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t). \tag{2.167}$$

Међутим, њене промене по наведеним варијаблама нису независне, већ задовољавају диференцијалну једнакост

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0, \tag{2.168}$$

која се назива Ојлер-Лагранжова једначина.

Пример 2.8.2. *Извести Ојлер-Лагранжову једначину (2.168).*

Решење. Мењамо координату $q(t)$ за мали износ $\eta(t)$. Интеграл (2.161) Лагранжове функције постаје:

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}[q(t) + \epsilon\eta(t), \dot{q}(t) + \epsilon\dot{\eta}(t), t]\, dt.$$

Тражимо екстремну вредност обзиром на ϵ. Зато је извод по ϵ нула, $d\mathcal{S}/d\epsilon = 0$, па за парцијалне изводе лагранжијана по варијаблама важи

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\right) dt = 0.$$

Други сабирак решавамо парцијалном интеграцијом

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}(t)\, dt = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\eta\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\eta(t)\, dt,$$

а први сабирак овог резултата је нула (исчезава на границама интегрирања). Зато претходни израз можемо писати

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\eta(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\eta(t)\right) dt = 0.$$

Извлачимо заједнички фактор $\eta(t)$, а интеграл исчезава за све варијације $\eta(t)$ ако и само ако је преостали фактор нула, тј. акко (2.168). □

Једначину (2.167) су пронашли Ојлер[20] и Лагранж 1970. године, проучавајући тзв. таутохроне или изохроне криве. То су криве дуж којих честица са датом масом пада у фиксну тачку у току фиксног периода времена, независно од њене почетне позиције. Лагранж је решио тај проблем 1755. године и послао решење Ојлеру. Оба су затим развили Лагранжов метод и применили га на механику, што је била основа данашње Лагранжове механике. Њихове преписке су основа *варијационог рачуна*, како га је назвао сам Ојлер 1766. године.

Пример 2.8.3. *Показати да за кретање простог клатна дужине l у гравитационом пољу важи диференцијална једначина*

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \tag{2.169}$$

где је g гравитационо убрзање.

[20] Leonhard Euler (1707-1783), швајцарски математичар.

Решење. На слици 2.18 лево је најпростије клатно, оно са ужетом дужине l које нема масу, нема инерцију, на чијем крају је утег масе m. Брзина утега је $v = l\dot{\theta}$, па је кинетичка енергија $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$. Потенцијална енергија E_p зависи само од y координате. Узимајући $\theta = 0$ када је $E_p = 0$, добијамо $y = l(1 - \cos\theta)$, док је $E_p = mgy$.

Лагранжова функција је разлика кинетичке и потенцијалне енергије клатна:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta),$$

са само једном генералисаном координатом $q_1 = \theta$. Лако налазимо изводе:

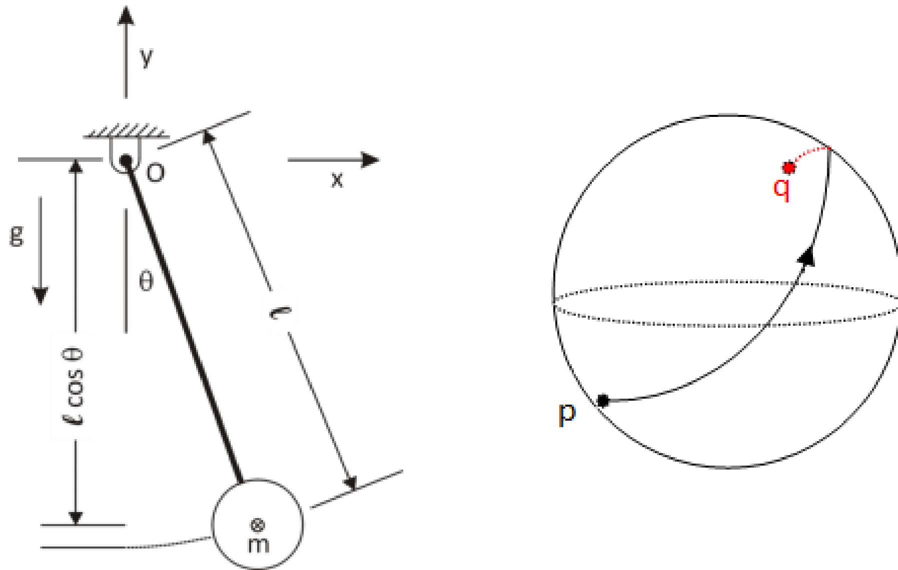
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mgl\sin\theta, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta},$$

које уврштавамо у Ојлер-Лагранжову једначину. Добијамо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

а то је тражена једначина. □



Slika 2.18: Клатно и сфера.

Када Ојлер-Лагранжову једначину користимо у теорији релативности, полазимо до облика (2.31) који придружујемо метрици и поједностављено пишемо $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu$. Једначине (2.168) постају

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{2.170}$$

где параметар τ дефинише кретање.

Пример 2.8.4. *Наћи једначине кретања на површини сфере.*

Решење. На слици 2.18 десно је сфера. То је површ чија је унутрашња метрика

$$d\ell^2 = \sin\theta^2 d\varphi^2 + d\theta^2. \tag{2.171}$$

Користимо пример 2.7.3 стављајући $r = 1$.

Лагранжијан придружен овој метрици је

$$\mathcal{L} = \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2,$$

Отуда налазимо:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = 2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 2\sin^2\theta\,\ddot{\varphi} + 4\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta},$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = 2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = 2\ddot{\theta}.$$

Уврштавајући ове резултате у Ојлер-Лагранжове једначине (2.170), добијамо:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + 2\operatorname{ctg}\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0, \\ \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0. \end{cases} \tag{2.172}$$

То су диференцијалне једначине геодезијских линија сфере. Решења ових једначина су велике кружнице сфере. □

Геодезици (2.172) се добијају и из примера 2.7.3, помоћу тензорских једначина

$$\ddot{x}^\eta + \Gamma^\eta_{\nu\mu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu = 0. \tag{2.173}$$

Ово су једначине геодезијских линија изражене Кристофеловим симболима. Ево једног детаљног, познатог[21] извођења тензорских једначина за геодезике.

Полазимо од линијског елемента

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\nu dx^\nu, \tag{2.174}$$

где метрику $g_{\mu\nu}$ пребројавамо индексима $\mu,\nu = 0,1,2,3$. Подразумева се Ајнштајнова конвенција за сабирање по поновљеном горњем и доњем индексу, такође и принцип варијација. Користимо систем јединица у којем је брзина светлости $c = 1$.

Сопствено време између два догађаја, A и B, износи

$$\tau_{AB} = \int_A^B \sqrt{-ds^2} = \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{x^\mu}{d\lambda}\frac{x^\nu}{d\lambda}}\,d\lambda, \tag{2.175}$$

где користимо параметар λ ради избегавања истих ознака за различита времена. Приметимо да је $d\tau/d\lambda$ лагранжијан и да за било коју функцију $f(\tau(\lambda))$ важи

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda} = \mathcal{L}\frac{df}{d\tau}, \tag{2.176}$$

ако је диференцијабилна.

[21] Dr. Russell L. Herman: Derivation of the Geodesic Equation, March 13, 2008

Ојлер-Лагранжове једначине сада добијају облик

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = 0, \tag{2.177}$$

где је $\dot{x}^\nu = \partial x^\nu / d\lambda$. Израчунавамо оба сабирка. Прво налазимо:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{2\mathcal{L}}\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\eta}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = -\frac{\mathcal{L}}{2}\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}. \tag{2.178}$$

Затим налазимо:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu} = -\frac{1}{2\mathcal{L}} g_{\sigma\mu}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial\lambda}\delta_{\sigma\nu} + \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\delta_{\mu\nu}\right) = \tag{2.179}$$

$$= -\frac{1}{2\mathcal{L}}\left(g_{\nu\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda} + g_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right)$$

$$= -\frac{1}{\mathcal{L}} g_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}.$$

Коначно израчунавамо и први сабирак:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\mathcal{L}} g_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right) = \tag{2.180}$$

$$= \mathcal{L}\frac{d}{d\tau}\left(g_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right)$$

$$= \mathcal{L}\left(g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right)$$

$$= \mathcal{L}\left(g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{d\tau}\frac{\partial x^\sigma}{d\tau}\right)$$

$$= \mathcal{L}\left[g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right].$$

Индекси метричког тензора су симетрични ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$). Поновљене индексе пренумеришемо, затим уклањамо лагранжијан прелазећи на изводе по сопственом времену.

Налазимо:

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \tag{2.181}$$

$$= \mathcal{L}\left[g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right] - \frac{\mathcal{L}}{2}\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Преуређујемо сабирке и мењамо неми индекс σ у α, па добијамо:

$$g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \tag{2.182}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}\right)\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu}\right)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$= -g_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

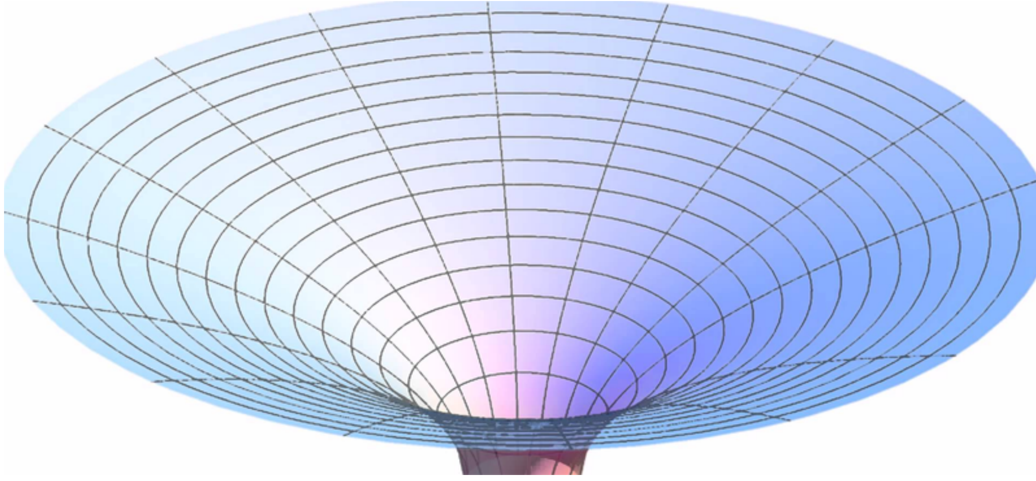
Тиме смо дошли до једначина (2.173) за геодезијске линије, где је $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Такође, извели смо изразе (2.150) за Кристофелове симболе.

2.9 Шварцшилдово поље

Размотримо досадашње закључке на Шварцшилдовој метрици (1.49), изведеној у примеру 2.5.1. Знамо да она дефинише централно симетрично гравитационо поље попут Сунчевог, када се занемари ротација Сунца и утицај планета. Координату времена ћемо опет означавати са $x^0 = ct$ и, као у (2.96), Шварцшилдов полупречник са $r_s = 2GM/c^2$. Шварцшилдова метрика је

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 + r^2d\theta^2. \tag{2.183}$$

Приметимо да је ds^2 увек негативан број, када год је пређени пут $d\ell$ за време dt мањи од брзине светлости. Тада је ds имагинарно.



Slika 2.19: Шварцшилдово поље.

Коефицијенти испред $dx^0 = cdt$ и dr постају све ближи јединици (± 1) када удаљеност од центра расте (r расте), да би се приближавањем бесконачности ($r \to \infty$) метрика (2.183) сводила на равну

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 + r^2d\theta^2, \tag{2.184}$$

писано у сферном систему координата $Or\varphi\theta$. У просторном делу ове метрике

$$d\ell^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 + r^2d\theta^2 \tag{2.185}$$

мења се само коефицијент испред dr, али не и угловни део $d\Omega^2 = \sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$.

Посматрач који мирује на некој позицији далеко од центра поља не осећа утицај гравитације и има приближно метрику (2.184). Та позиција има исти интервал ds као и позиција посматрача који мирује на удаљености r од центра поља са метриком (2.183). Међутим, из тих система се не виде једнаке јединице дужине и трајања другог. Изједначавањем интервале ds и означавајући индексом нула сопствено време посматрача ван поља, а обзиром да обе позиције мирују, добијамо:

$$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + d\ell^2 = -c^2dt_0^2 + d\ell_0^2, \quad d\ell = d\ell_0 = 0,$$

а отуда

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}. \tag{2.186}$$

Што је позиција ближа центру гравитационог поља, у односу на посматрача изван поља, време тече спорије. Када је $r \approx r_s$, тада се време зауставља и зато се сфера са Шварцшилдовим полупречником назива *хоризонт догађаја*. На основу полазних хипотеза, можемо констатовати да за релативну ентропију важи

$$dS = dS_0\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}, \tag{2.187}$$

где је dS_0 сопствена ентропија[22] посматрача изван поља.

Постављa се питање како је то у складу са принципом ентропије? Једноставно, да не би губило ентропију тело добија брзину. Гравитациона сила привлачи тела ка позицијама ниже ентропије, али оно у те позиције не долази у стање мировања, већ у стање кретања и то тачно толиком брзином (1.41) којом би се у случају инерцијалног кретања могло опазити релативно смањење ентропије према формули (2.187). Тело у слободном паду мења брзине у односу на позиције поља, али све време мирује у сопственом локалном (проближном) инерцијалном систему.

Обрнуто, када би се тело ван поља кретало једноликом брзином $v = \frac{d\ell_0}{dt_0}$, а тело у пољу мировало на удаљености r од центра поља, тада би претходно изједначавање интервала дало:

$$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + d\ell^2 = -c^2dt_0^2 + d\ell_0^2, \quad d\ell = 0,$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 = (c^2 - v^2)dt_0^2,$$

па је релативно време

$$dt = \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{r_s}{r}}}dt_0. \tag{2.188}$$

Оно тече једнаком брзиним када је $\frac{v^2}{c^2} = \frac{r_s}{r}$, а то је опет брзина (1.41). То значи да тело у слободном паду у општој теорији релативности одржава своју ентропију константном, максималном, ако су такве и сопствене ентропије тела у инерцијалном кретању у специјалној теорији релативности.

Овде има смисла и објашњење понуђено уз Доплеров ефекат у примеру **??**. Тело бира позиције ближе центру масе, јер су тада радијалне дужине краће, релативно су краће таласне дужине што на начин поменутог објашњења значи и веће вероватнће. Међутим, тело у те позиције улази тако да не наруши претходно инерцијално кретање. Да су радијалне дужине заиста релативно краће израчунавамо замишљајући две тачке на крајевима истог штапа у мировању, мерено истовремено у систему изван поља и у пољу. Изједначавањем интервала добијамо

$$dr = dr_0\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}, \quad d\Omega = d\Omega_0, \tag{2.189}$$

где је дужина са индексом нула посматрана изван гравитационог поља.

[22] Прецизније речено, то су инфинитезималне промене.

Успоравање времена (2.186) има познате, али и друге занимљиве ефекте. Време успорава тачно толико колико се скраћују радијалне дужине (2.189). Зато, радијална брзина светлости (c) у Шварцшилдовом пољу остаје иста, али не и окомита ($c_\perp$). Брзина светлости окомита на радијалну је већа

$$c_\perp = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}}. \tag{2.190}$$

Ова бочна брзина светлости расте са приближавањем хоризонту догађаја, $r \to r_s$, тако да светлост увек може побећи гравитационом стиску црне рупе. То је другачије објашњење иначе познате Хокингове радијације[23]. Ако је (2.190) тачно[24], питање је да ли и како те различите брзине утичу на грвитационо преламање светлости.

Математика дозвољава наизглед неспојиве интерпретације (исте) истине, налик (истој) кући на брду којој се може прићи са различитих страна. Сваки од тих приступа, ако је математички коректан, даће неки посебан, тачан и апстрактан аспект реалности. Ајнштајнова метода третирања гравитације је исувише геометријска да би била довољно физикална, али управо зато има велике шансе да буде изузетно тачна. Сличне његовом су и овде предложена посматрања истог поља помоћу вероватноће, или ентропије.

За метрику (2.183) израчунавамо Кристофелове симболе:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^0_{00} = 0 & \Gamma^0_{0r} = \Gamma^0_{r0} = \frac{r_s}{2r^2(1-r_s/r)} & \Gamma^0_{rr} = 0 \\
\Gamma^r_{00} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{r_s}{r^2} & \Gamma^r_{0r} = \Gamma^r_{r0} = 0 & \Gamma^r_{rr} = -\frac{r_s}{2r^2(1-r_s/r)} \\
\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right) r\sin^2\theta & \Gamma^r_{\theta\theta} = -r\left(1-\frac{r_s}{r}\right) & \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta & \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta
\end{array} \tag{2.191}$$

Та метрика одређује и 4-брзине $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$:

$$1 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2, \tag{2.192}$$

$$1 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)(u^0)^2 + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}(u^r)^2 + r^2\sin^2\theta(u^\varphi)^2 + r^2(u^\theta)^2,$$

чије су све компоненте такође (због имагинарног ds) имагинарне.

Једначине геодезијских линија у овим условима ($\dot{u} = \frac{du}{ds}$) су, уопште:

$$\dot{u}^\eta + \Gamma^\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0. \tag{2.193}$$

Приметимо да можемо ставити $ds = \lambda d\tau$, где је $\lambda \in \mathbb{C}$ произвољна константа, па опет имати исте диференцијалне једначине геодезика, али по новој варијабли τ. У Шварцшилдовом случају добијамо:

$$\begin{cases}
\dot{u}^0 + \frac{r_s}{r^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} u^0 u^r = 0 \\
\dot{u}^r + \frac{r_s}{2r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)(u^0)^2 - \frac{r_s}{2r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}(u^r)^2 - r\left(1-\frac{r_s}{r}\right)[\sin^2\theta(u^\varphi)^2 + (u^\theta)^2] = 0 \\
\dot{u}^\varphi + \frac{2}{r}u^r u^\varphi + 2\operatorname{ctg}\theta u^\varphi u^\theta = 0 \\
\dot{u}^\theta + \frac{2}{r}u^r u^\theta - \sin\theta\cos\theta(u^\varphi)^2 = 0.
\end{cases}$$

Потражимо геодезијске линије за честицу која у почетном тренутку мирује.

[23] Hawking radiation: `https://en.wikipedia.org/wiki/Hawking_radiation`

[24] Нећемо се овде тиме бавити.

Када су све три просторне брзине нуле, $u^r = u^\varphi = u^\theta = 0$, тада из (2.185) налазимо

$$(\dot{u}^0)_{t=0} = \left(\frac{cdt}{ds}\right)_{t=0} = \frac{i}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r_0}}}, \quad i^2 = -1, \tag{2.194}$$

где је r_0 почетна удаљеност од исходишта. У том случају су угловна убрзања нуле, али постоји радијално убрзање. Зато се претходни систем своди на две једначине:

$$\begin{cases} \dot{u}^0 + \frac{r_s}{r^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}u^0 u^r = 0 \\ \dot{u}^r + \frac{r_s}{2r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)(u^0)^2 - \frac{r_s}{2r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}(u^r)^2 = 0, \end{cases} \tag{2.195}$$

којима одговара линијски елеменат

$$1 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)(u^0)^2 + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}(u^r)^2. \tag{2.196}$$

Интегрирамо прву једначину:

$$du^0 + \frac{r_s}{r^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}u^0 dr = 0,$$

$$\frac{du^0}{u^0} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r-r_s}\right)dr,$$

$$u^0 = C_0\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \tag{2.197}$$

где је $C_0 = i\sqrt{1-\frac{r_s}{r_0}}$ константа интеграције, што добијамо из почетних услова (2.194). Радијалну компоненту брзине израчунавамо из линијског елемента (2.196):

$$1 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left[-C_0\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\right]^2 + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}(u^r)^2,$$

$$1 = -C_0^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}(u^r)^2,$$

$$\left(1-\frac{r_s}{r}\right) + C_0^2 = (u^r)^2,$$

$$\left(1-\frac{r_s}{r}\right) - \left(1-\frac{r_s}{r_0}\right) = (u^r)^2,$$

$$u^r = \sqrt{\frac{r_s}{r_0} - \frac{r_s}{r}}. \tag{2.198}$$

Како честица пада на нижу висину, $r < r_0$, то је израз под кореном негативан, па је и радијална компонента 4-брзине имагинарна, као што и најављено. Свеједно, интегрирамо. Из $u^r = dr/ds$ следи $ds = dr/u^2$, па имамо даље:

$$s = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_s}{r_0} - \frac{r_s}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{r_s}}\int \frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1}}.$$

Смена $y = \sqrt{r}$ даје $dy = \frac{1}{2}\frac{dr}{\sqrt{r}}$, затим користимо хиперболне функције (2.49) за смену $y = \sqrt{r_0}\operatorname{ch}\xi$ одакле $dy = \sqrt{r_0}\operatorname{sh}\xi\, d\xi$. Тако израчунавамо:

$$s = \frac{2}{\sqrt{r_s}}\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{\frac{y^2}{r_0} - 1}} = \frac{2}{\sqrt{r_s}}\int \frac{(r_0 \operatorname{ch}\xi)^2 \sqrt{r_0}\operatorname{sh}\xi\, d\xi}{\operatorname{sh}\xi} =$$

$$= \frac{2(r_0)^{3/2}}{\sqrt{r_s}}\int \operatorname{ch}^2\xi\, d\xi = \frac{(r_0)^{3/2}}{\sqrt{r_s}}\int (\operatorname{ch}^2\xi + 1 + \operatorname{sh}^2\xi) d\xi$$

$$= \frac{(r_0)^{3/2}}{\sqrt{r_s}}\int (\operatorname{ch}2\xi + 1) d\xi = \frac{(r_0)^{3/2}}{\sqrt{r_s}}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\xi + \xi\right)$$

$$= \frac{(r_0)^{3/2}}{\sqrt{r_s}}\left(\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi + \operatorname{ch}^{-1}\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right),$$

$$s = \sqrt{\frac{r_0}{r_s}}r + \sqrt{\frac{r_0}{r_s}}r_0 \operatorname{ch}^{-1}\sqrt{\frac{r}{r_0}}, \tag{2.199}$$

где је $\operatorname{ch}^{-1} x$ инверзна функција косинуса хиперболног $\operatorname{ch} x$.

Ово можемо добити и из друге једначине (2.195), и након супституције за u^0:

$$0 = \dot{u}^r + \frac{r_s}{2r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)(u^0)^2 - \frac{r_s}{2r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}(u^r)^2,$$

$$0 = \dot{u}^r - \frac{r_s}{2r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} - \frac{r_s}{2r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}(u^r)^2$$

$$\dot{u}^r = \frac{r_s}{r(r - r_s)}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) + \frac{1}{2}(u^r)^2\right],$$

па након раздвајања и множења обе стране са $u^1 = \frac{dr}{ds}$:

$$\frac{u^r du^r}{\frac{1}{2}[(1 - r_s/r_0) + (u^r)^2]} = \frac{r_s}{r(r - r_s)}dr,$$

$$\int \frac{2u^r du^r}{(1 - r_s/r_0) + (u^r)^2} = \ln r - \ln(r - r_s),$$

$$\ln\left[\left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) + (u^r)^2\right] = \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right),$$

$$(u^r)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) = \frac{r_s}{r_0} - \frac{r_s}{r}, \tag{2.200}$$

а отуда (2.198).

Из (2.197) добијамо приближно:

$$\frac{cdt}{ds} = \frac{i\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_0}}}{1 - \frac{r_s}{r}} = i\left(1 - \frac{r_s}{2r_0}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = i\left(1 - \frac{r_s}{r_0} - \frac{r_s}{r}\right) = i,$$

одакле

$$ds^2 = -c^2 dt^2, \quad (u^r)^2 = -\frac{1}{c^2}\frac{d^2 r}{dt^2}. \tag{2.201}$$

2.10 Орбите и путање

Тражимо путање тела у присуству привлачне гравитационе силе. Прво израчунавамо орбите за Њутнову гравитацију, уважавајући законе одржања. Вектор брзине у сферним координатама је

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \tag{2.202}$$

где тачка изнад значи извод по времену, а $\hat{r}$, $\hat{\varphi}$ и $\hat{\theta}$ су базни вектори система $Or\varphi\theta$. Угловни импулс (ангуларни моменат) је

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= m\vec{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$$
$$= mr\sin\theta\dot{\varphi}\,\vec{r} \times \hat{\varphi} + mr\dot{\theta}\,\vec{r} \times \hat{\theta},$$

$$\vec{L} = mr\,\vec{r} \times (\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{\theta}\hat{\theta}). \tag{2.203}$$

Због закона одржања угловног импулса, вектор $\vec{L}$ има стално исти правац, смер и интензитет, а видимо да је окомит на раван $\theta = \frac{\pi}{2}$ и паралелан са ординатом. Отуда следи да је брзина $\vec{v}$ стално у истој равни Oxy и да можемо писати:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}, \quad \vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\hat{k}, \tag{2.204}$$

где је $\hat{k}$ јединични вектор z-осе. И заиста, свака од планета Сунчевог система кружи у по једној равни, као што се види на слици 2.20.

Slika 2.20: Орбите сунчевог система.

Енергија је такође конзервирана

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}. \tag{2.205}$$

Угловни импулс по јединици масе и енергију по јединици масе означимо редом са:

$$l = r^2\dot{\varphi}, \quad E = \frac{\mathcal{E}}{m}. \tag{2.206}$$

Тада је $\dot{\varphi} = l/r^2$, па имамо:

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{GM}{r},$$

$$\dot{r} = \sqrt{2E - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2GM}{r}}.$$

Да нађемо једначину орбите, $r(\varphi)$, поделимо са $\dot{\varphi} = 1/r^2$ и интегрирајмо ($u = 1/r$):

$$\varphi = \int \frac{ldr}{r^2\sqrt{2E - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2GM}{r}}}$$

$$= \int \frac{-ldu}{\sqrt{2E - l^2u^2 + 2GMu}}$$

$$= \int \frac{-ldu}{\sqrt{-\left(\frac{GM}{l} - lu\right)^2 + 2E + \frac{G^2M^2}{l^2}}}.$$

Уводимо смену $y = \frac{GM}{l} - lu$, $A^2 = 2E + \frac{G^2M^2}{l^2}$, па настављамо:

$$\varphi = \int \frac{dy}{\sqrt{-y^2 + A^2}} = \int \frac{A\cos\theta\, d\theta}{A\cos\theta} = \theta = \arcsin\left(\frac{y}{A}\right),$$

$$A\sin\varphi = y = \frac{GM}{l} - lu = \frac{GM}{l} - \frac{l}{r},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2} - \frac{A}{l}\sin\varphi,$$

$$r = \frac{\frac{r^2}{GM}}{1 - \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{G^2M^2}}\sin\varphi},$$

$$r = \frac{a}{1 - e\sin\varphi}, \tag{2.207}$$

а то је једначина елипсе са жижом у центру поларног система $Or\varphi$.

Прелазећи на Декартове координате Oxy добијамо, редом:

$$r - er\sin\varphi = a,$$

$$r = a + ey,$$

$$r^2 = a^2 + 2aey + e^2y^2,$$

$$x^2 + y^2 = a^2 + 2eay + e^2y^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2eay - ey^2 = a^2,$$

$$x^2 + (1-e)\left(y - \frac{ae}{1-e}\right)^2 = a^2\left(1 + \frac{e^2}{1-e}\right),$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{c^2} = 1, \tag{2.208}$$

где је $y_0 = ae/(1-e)$, $b = a^2[1 + e^2/(1-e)]$, $c^2 = b^2/(1-e)$. То је стандардни облик елипсе са центром $(0, y_0)$ која је орбита за негативну енергију ($E < 0$). За позитивну енергију, израчунавање интеграла иде преко хиперболних функција, а добијена орбита је хипербола.

Сада се вратимо на орбите према општој релативности. Из једначина геодезијских линија (2.193), линијског елемента (2.183) и почетних услова $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u^2(0) = 0$, следи:

$$\begin{cases} \dot{u}^0 - \frac{r_s}{r^2(1-r_s/r)} u^0 u^r = 0, \\ \dot{u}^r + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{r_s}{2r^2} (u^0)^2 - \frac{r_s}{2r^2(1-r_s/r)} (u^r)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) r (u^\varphi)^2 = 0, \\ \dot{u}^\varphi + \frac{2}{r} u^r u^\varphi = 0, \\ \dot{u}^\theta = 0. \end{cases}$$

Из четврте једначине имамо $u^\theta = 0$. Затим интегрирамо трећу:

$$\frac{du^\varphi}{u^\varphi} = -\frac{2}{r} dr,$$

$$u^\varphi = \frac{\text{const.}}{r^2},$$

што просто значи конзервацију угловног импулса, $r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = l_0$. Исти резултат (2.197) добијамо из друге једначине, при чему се зависно од избора константе интеграције C_0 мења врста орбите.

Када линијски елеменат Шварцшилдове метрике пишемо у облику $\frac{ds^2}{d\tau^2} = -1$, за интервал $d\tau$ добијамо реалан број, па даље имамо:

$$-1 = -\frac{C_0^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{1}{c^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l_0^2}{c^2 r^2},$$

$$-1 + \frac{r_s}{r} = -C_0^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l_0^2}{c^2 r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right),$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = C_0^2 - 1 + \frac{r_s}{r} - \frac{l_0^2}{c^2 r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right).$$

Да би пронашли C_0, ставимо да је $\tau = 0$, када је $\frac{dr}{d\tau} = 0$. Тада:

$$-1 = -\frac{C_0^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{l_0^2}{c^2 r_0^2},$$

$$C_0^2 = \left(1 + \frac{l_0^2}{c^2 r_0^2}\right)\left(1 - \frac{2GM l_0^2}{c^2 r_0^2}\right),$$

$$C_0 = \sqrt{1 + \frac{l_0^2}{c^2 r_0^2} - \frac{2GM}{c^2 r_0^2} - \frac{2GM l_0^2}{c^4 r_0^3}},$$

па како је $r_s = 2GM/c^2$, добијамо:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -\frac{2GM}{r_0} + \frac{2GM}{r} + \frac{l_0^2}{r_0^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_0}\right) - \frac{l_0^2}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right).$$

Једначину орбите налазимо делећи са $\varphi^2 = l_0^2/r^4$:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^4 \left[-\frac{2GM}{r_0 l_0^2} + \frac{2GM}{r l_0^2} + \frac{1}{r_0^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_0}\right) - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\right],$$

$$d\varphi = \frac{dr}{r^2\sqrt{-\frac{2GM}{r_0 l_0^2} + \frac{2GM}{r l_0^2} + \frac{1}{r_0^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_0}\right) - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}}.$$

Сменом $\xi = 1/r$ ово постаје:

$$d\varphi = \frac{-\frac{1}{\xi^2}u^2 d\xi}{\sqrt{-\frac{2GM}{l_0^2}\xi_0 + \frac{2GM}{l_0^2}\xi + u_0^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2}\xi_0\right) - \xi^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\xi\right)}},$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = \left[\xi_0^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2}\xi_0\right) - \frac{2GM}{l_0^2}\xi_0\right] + \frac{2GM}{l_0^2}\xi - \xi^2 + \frac{2GM}{c^2}\xi^3,$$

а то би била једначина елипсе да није последњег сабирка.

Уведимо ознаке:

$$\xi' = \frac{d\xi}{d\varphi}, \quad A = \xi_0^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2}\xi_0\right) - \frac{2GM}{l_0^2}\xi_0,$$

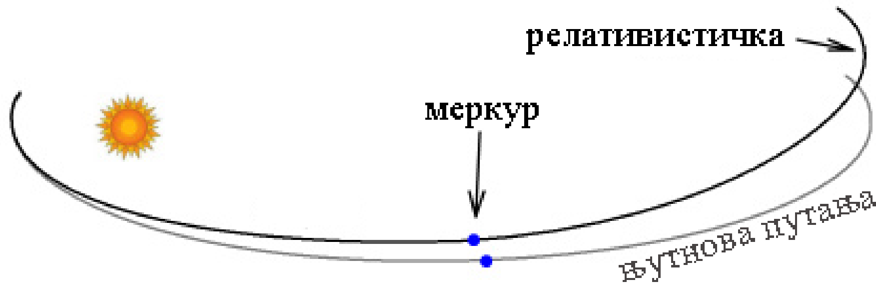
$$B = \frac{2GM}{l_0^2}, \quad C = \frac{2GM}{c^2},$$

па добијамо:

$$(\xi')^2 = A + B\xi - \xi^2 + C\xi^3,$$

$$d\varphi = \frac{-d\xi}{\sqrt{A + B\xi - \xi^2 + C\xi^3}}. \tag{2.209}$$

Ово се подудара са Кеплеровим резултатом, осим што има последњи сабирак под кореном, кубни члан, који је веома мали број за невелике звезде и планете. Он изазива промену која се види на слици 2.21.



Slika 2.21: Померање перихела Меркура.

Када интегрирамо (2.209) до пола орбите, а без последњег кубног члана под кореном, добијамо π. Множећи са 2 правимо пуни круг, односно

$$2\pi = -2\int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{d\xi}{\sqrt{A + B\xi - \xi^2}},$$

где су $\xi_\pm$ екстреми орбите. Перихел напредује за износ разлике 2π и интеграла:

$$\Delta\varphi = 2\pi - 2\int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{d\xi}{\sqrt{A + B\xi - \xi^2 + C\xi^3}}. \tag{2.210}$$

Према овој формули, перихел Меркура напредује за око $43''$ у току столећа, што је у одличној сагласности са експерименталним проверама.

Сада се вратимо на израчунавање геодезика узимајући у обзир нулти случај $\frac{ds^2}{d\tau^2}=0$, дакле кретање светлости. Тада још увек имамо:

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)u^0 = C_0 = \sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}},$$

$$r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = l_0 = cr_0,$$

где је r_0 радијус најближег положаја. Сада имамо:

$$0 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{r^2}{c^2}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{r^2}{c^2}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2,$$

$$= -\frac{C_0^2}{1-\frac{r_g}{r}} + \frac{1}{c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l_0^2}{c^2r^2}.$$

Отуда, за $r_g = 2GM/r$ добијамо:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = C_0^2c^2 - \frac{c^2r_0^2}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right).$$

За најближи радијус ово постаје:

$$0 = C_0^2c^2 - \frac{l_0^2}{r_0^2}\left(1-\frac{2GM}{r_0}\right),$$

$$0 = C_0^2 - \left(1-\frac{2GM}{r_0}\right).$$

Поступак је даље исти као претходни. Конвертујемо у једначину по r и φ. Постављамо $A = \frac{C_0c}{l_0} = \frac{1}{r_0}\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}$, па долазимо до:

$$\frac{dr}{d\tau}/\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{r^2}{cr_0}\sqrt{c^2C_0^2 - \frac{l_0^2}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)},$$

$$d\varphi = \frac{dr}{\frac{r^2}{cr_0}\sqrt{c^2C_0^2 - \frac{l_0^2}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}}$$

$$= \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2}C_0^2 - \frac{l_0^2}{c^2r_0^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}}$$

$$= \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1 + \frac{2GM}{r} - \frac{r^2}{r_0^2}\frac{2GM}{r_0}}}$$

$$= \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2}-1}\sqrt{1+\frac{2GM}{r_0}\frac{r_0^3/r^3-1}{1-r_0^2/r^2}}}.$$

Укупна промена угла је је двоструки интеграл од бесконачности до r_0. Промена одговара одступању угла φ од π, па је

$$\Delta\varphi = -\pi + 2\int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2}-1}\sqrt{1+\frac{2GM}{r_0}\frac{r_0^3/r^3-1}{1-r_0^2/r^2}}}.$$

Даље развијамо други корен у степени ред по $\frac{MG}{r_0} << 1$ и уводимо смену $\frac{r_0}{r} = \sin\theta$:

$$\Delta\varphi = -\pi + 2\int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2}-1}}\left[1+\frac{GM}{r_0}\left(1-\frac{r_0^3}{r^3}\right)\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1}+\mathcal{O}\left(\frac{G^2M^2}{r_0^2}\right)\right]$$

$$= -\pi + 2\int \frac{r_0 dr}{r^2\sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}}\left[1+\frac{GM}{r_0}\left(1-\frac{r_0^3}{r^3}\right)\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1}\right]$$

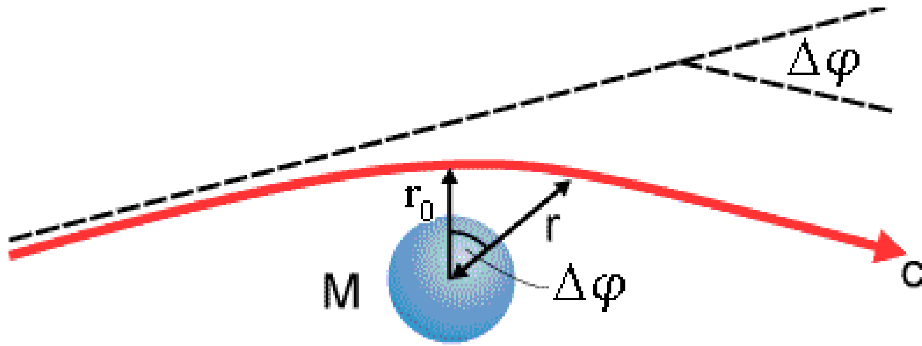
$$= -\pi + 2\int_0^{\pi/2} d\theta\left[1+\frac{GM}{r_0}(1-\sin^3\theta)(1-\sin^2\theta)^{-1}\right]$$

$$= -\pi + 2\int_0^{\pi/2} d\theta\left[1+\frac{GM}{r_0}(1+\sin\theta+\sin^2\theta)(1+\sin\theta)^{-1}\right]$$

$$= \frac{2GM}{r_0}(1+\sin\theta)^{-1}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta+(\cos\theta-2)\sin\frac{\theta}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2GM}{2r_0}\left(\sqrt{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(-2) - \frac{2m}{r_0},$$

$$\Delta\varphi = -\frac{4GM}{r_0}. \tag{2.211}$$



Slika 2.22: Савијање светлости.

За Сунце добијамо

$$\frac{4GM}{r_0} = \frac{4\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 1,99\cdot 10^{30}}{6,69\cdot 10^8} = 1,748'',$$

што значи да се светлост отклања за угао од 1,75 секунди. То је експериментално потврђено.

2.11 Паралелно померање

Основна сврха Римановог[25] тензора R^l_{ijk} је дефинисање кривине простора на начин који је у складу са нашом интуицијом. Генијална идеја Римана била је да посматра паралелни транспорт, као на слици 2.23.

Тангентни вектор сфере на слици, из тачке A мало-по-мало паралелно самом себи померa се ка тачки N а затим кружно преко B назад у тачку A. Када се врати у полазну тачку, он је тада неки други вектор који са полазним чини угао α. Ако је $\alpha \neq 0$, сфера је закривљена.

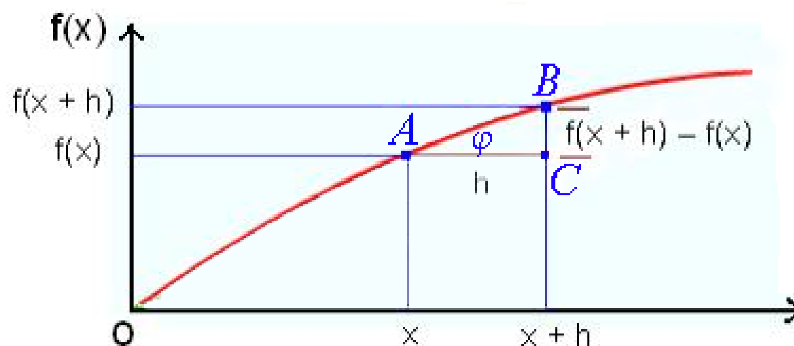
Када су геодезијске линије сфере најкраћа растојања између датих парова тачака, онда те линије леже на највећим кружницама сфере и описани поступак може резултирати углом $\alpha \neq 0$, за разлику од паралелног транспорта по некој мањој кружници на сфери. Сличан паралелни транспорт по затвореној кривој линији равне површине доводи нас тачно до полазног вектора, односно угла $\alpha = 0$.

Slika 2.23: Паралелни транспорт.

Из класичне математичке анализе у Декартовој рави знамо да је *извод* функције једнак тангенсу угла између апсцисе и тангенте на криву те функције у датој тачки. Прецизније речено, ако је дата функција $f = f(x)$ представљена глатком кривом у равни, онда је њен извод у тачки $A(x, f(x))$ једнак лимесу

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx} = \operatorname{tg}\varphi, \tag{2.212}$$

где је $\varphi = \varphi(x)$ угао између апсцисе (x-осе) и тангенте на криву у тачки A. На слици



Slika 2.24: Извод је тангенс угла тангенте.

[25] Bernhard Riemann (1826-1866), немачки математичар.

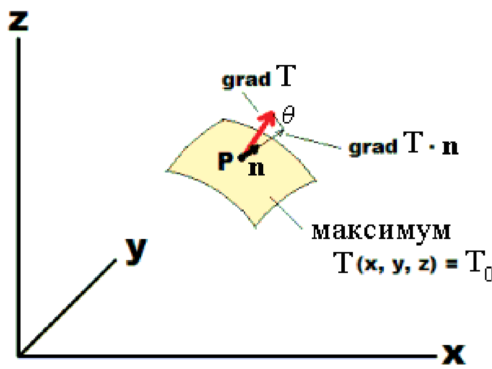
2.24 то је приближно $\operatorname{tg}\varphi = \overline{BC} : \overline{AC}$. Када би f била геодезијска крива, вектор који би се паралелно померао по њој одржавао би константним угао са њеном тангентом.

У случају да функција расте (с лева на десно), као на датој слици, тада је угао тангенте оштар, $0 < \varphi < 90°$, тангенс тог угла је позитиван број па је извод позитиван број, тј. $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi(x) > 0$. У случају да је функција опадајућа, угао тангенте је туп па је тангенс тог угла односно извод мањи од нуле. Локални максимум (минимум) функције препознајемо по преласку раста у пад (пада у раст), односно по преласку извода из позитивних у негативне (или обрнуто) вредности. У оба случаја, у тачки екстрема је извод функције нула.

Замислимо даље, да имамо 3-дим простор $Oxyz$ и неку функцију, попут температуре у пећници, $T = T(x,y,z)$ која се полако мења од тачке до тачке. Када тражимо смер пораста температуре, посматраћемо изводе по све три кординате и формирати вектор помоћу њих

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla T, \tag{2.213}$$

који се назива градијент. Јединични вектори Декартове апсцисе, ординате и апликате су редом **i**, **j** и **k**.



Са друге стране, у разним тачкама температура узима разне вредности, дефинишући неку површ $T = T(x,y,z)$, као на слици лево. Линије површи које формирају тачке константне температуре називају се нивои површи, или геодезијске линије температуре. Вектор који би лежао на истом нивоу имао би разлику температура нула, па би његов „градијент“ био нула вектор и он би био окомит на градијент (2.213), јер је нула вектор окомит на сваки вектор.

Нека је $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x,y,z)$ јединични вектор нормале, окомит на површ истих температура у датој тачки. Он показује правац и смер најбржег раста температуре. Компоненте нормале, n_x, n_y и n_z, су такве да је њихов збир квадрата један. Угао између градијента и нормале је θ. Скаларни производ вектора је једнак производу њихових интензитета и косинуса угла између, или множено по координатама, скаларни производ градијента и нормале температуре је:

$$\operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial T}{\partial x}n_x + \frac{\partial T}{\partial y}n_y + \frac{\partial T}{\partial z}n_z = |\operatorname{grad} T|\cos\theta. \tag{2.214}$$

То је скалар (број) који има највећу вредност када је угао између градијента и нормале нула, $\theta = 0$, јер тада је косинус максималан, $\cos 0 = 1$. У случају да је тачка T_0 локални екстрем, сва три извода су нуле, па су и градијент и број (2.214) нуле.

Пример 2.11.1. *Показати да из (2.214) следи да градијент увек показује смер највећег пораста функције T.*

Решење. Користимо познату Коши-Шварцову неједнакост (пример 4.2.2)

$$x_1y_1 + x_2y^2 + \dots + x_ky_k \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2}, \tag{2.215}$$

која важи за све за све $x_i, y_j \in \mathbb{R}$, а где једнакост важи ако и само ако постоји реалан број λ такав да је $x_i = \lambda y_i$ за све $i = 1, 2, \dots, k$. Примењено на (2.214) имамо једно λ у све три једнакости $\partial_\xi T = \lambda n_\xi$, за све три координате $\xi \in \{x, y, z\}$. Отуда $\operatorname{grad} T \| \mathbf{n}$. □

Када пређемо са Декартових $Oxyz$ на сферне координате $Or\varphi\theta$, важи:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \tag{2.216}$$

за све три Декартове координате $\xi \in \{x, y, z\}$. Отуда градијент

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial r}\mathbf{g}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\mathbf{g}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\mathbf{g}_\theta, \tag{2.217}$$

где су $\mathbf{g}_r$, $\mathbf{g}_\varphi$ и $\mathbf{g}_\theta$ јединични вектори координата r, φ и θ.

Пример 2.11.2. *Нaћи градијент температуре гравитационог поља.*

Решење. Црвени помак за гравитационо поље означава смањење фреквенције таласа честице у гравитационом пољу због успоравања времена, односно повећање таласних дужина. То овде (не у савременој физици) тумачимо као повећање температуре дате честице-таласа, коју опажа релативни посматрач изван поља, али не и дата честица. Њена сопствена температура је константно T_0, док је њена релативна температура у Шварцшилдовом пољу

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}, \tag{2.218}$$

када је центар сферног система постављен у центар поља. Отуда

$$\operatorname{grad} T = -\frac{r_s}{2r^2}\frac{T_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^3}}\,\mathbf{g}_r. \tag{2.219}$$

Парцијални изводи релативне температуре T по угловима φ и θ су нуле и остаје само изведени брзи радијални пад температуре са удаљавањем од центра. □

У складу са нашим претходним разматрањима (такође мимо савремене физике), релативна ентропија у овом пољу износи

$$S = S_0\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}, \tag{2.220}$$

где је S_0 сопствена ентропија како је види дата честица на датом месту. Затим, према Клаузијусовој дефиницији ентропије (1.9), морала би бити релативна топлота честице константна

$$Q = Q_0. \tag{2.221}$$

Према томе, топлота Q и енталпија H (укупна унутрашња енергија) како у специјалној тако и у општој теорији релативности нису еквиваленти. То помињем због разликовања ове теорије од савремене физике према којој, као што знамо, топлота и енталпија јесу еквиваленти.

Градијент релативне ентропије (2.220) износи

$$\operatorname{grad} S = \frac{r_s}{2r^2}\frac{S_0}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}\,\mathbf{g}_r. \tag{2.222}$$

То је вектор који показује смер пораста релативне ентропије фиксних тачака поља у односу на посматрача који мирује изван поља. Усмерен ка релативном посматрачу, овај вектор му каже да се он налази у стабилном стању, не вуче га сила.

За посматрача изван поља, две фиксне тачке у пољу на удаљеностима r_1 и r_2 од центра поља имају одоварајуће ентропије (2.220). Када је $r_1 < r_2$ тада је $S_1 < S_2$, што значи да је на мањој (статичној) висини мања ентропија. То смањење ентропија у (фиксним) тачкама ближим центру поља опажаће (са другачијим износима) и други релативни посматрачи, па и они који се налазе у слободном паду у том пољу. Управо зато, тело које пролази различитим тачкама поља имаће различите одговарајуће брзине проласка тим тачкама. Неће се сви релативни посматрачи сложити око тачног износа ових брзина, осим да је $v_1 > v_2$, када год је $r_1 < r_2$.

Ето зашто гравитациона сила телу даје убрзање. Једноставно речено, она га доводи у позиције мање ентропије али веће брзине. При томе, ако на дато тело не делују још неке силе, оно (скоро да) не примећује нити промену сопствене ентропије, нити брзине, нити осећа дејство силе. Зато је слободан пад толико једнак инерцијалном кретању.

У веома јаком гравитационом пољу, посматрач у просторији која би била у слободном паду, рецимо са подом према центру силе, могао би приметити појачано бочно стискање (привлачење) честица у соби, које је у нескладу са вертикалним истезањем (одбијањем). Он би тако ипак могао знати да се налази у слободном паду, а не у инерцијалном систему изван поља. Исти би ефекат постојао и у слабијим пољима, независно од тога колико га посматрач у соби игнорише. Зато морају постојати и различити ефекти на различитим путањама сателита, које би могао да примети и посматрач изван поља. Такви ефекти произилазе и из објашњења слике 1.11. Брзина сателита који ротира на висини r је (1.39), дакле мања је од оне коју би на истом месту имало тело стигло на ту позицију из слободног пада из бесконачности. Ове разлике брзина сведоче релативном посматрачу о различитостима појединих слободних падања.

Вратимо се опет на паралелно померање, али сада у следећој замишљеној ситуацији. Претпоставимо да имамо два сателита чије се путање (елипсе) укрштају у тачкама A и B. Посматрачи у тим сателитима лебде у бестежинском стању, без унутрашње ротације. Замислимо да први посматрач на путањи до A одржава неки вектор (оријентисану дуж) непокретним и да такав правац и смер препоручи другом посматрачу у тренутку њиховог мимоилажења у тачки (догађају) сусрета. Други посматрач преузима правац и смер вектора првог и преноси га без промене од A до сусрета у B са првим. Први преузме вектор у B и упореди га са својим почетним вектором. Према Римановој замисли, ако су почетни и крајњи вектори паралелни, простор тог гравитационог поља није закривљен.

Ако је, како је могуће да на крају тог „кружног“ путовања, вектор не буде паралелан са својом почетном вредношћу? Тражимо интуитивно објашњење. Први и други сателит се крећу различитим брзинама по различитим елипсама, инерцијално. Чак и ако није спорно да је вектор „непокретан“ током путање AB, као и BA, спорно је шта се заправо преноси као „правац и смер“ тог вектора у догађајима A и B. Сетимо се само једноликог праволинијског кретања воза у односу на насип. Трајекторија тела које путује окомито на пругу у односу на посматрача у возу, није окомита у односу на посматрача на насипу. Споран је пренос паралелности са једног на други сателит који су у узајамном инерцијалном кретању. Простор је закривљен (уврнут) зато што су та два кретања стално инерцијална, а чине затворену путању.

Пређимо сада на неинтуитивно објашњење помоћу тензорског рачуна. Коваријантна деривација (2.129) тада има предност јер је она за разлику од обичне тензор. Зато се

назива и *апсолутни градијент.* За контраваријантни вектор A^k коваријантна деривација се дефинише са:

$$\nabla_j A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^i \Gamma^k_{ij}. \tag{2.223}$$

Ми смо раније нашли формулу за Кристофелове симболе (2.150).

Пре свега приметимо: 1. коваријантна деривација скалара је исто што и обична деривација; 2. за коваријантну деривацију важи правило производа:

$$\nabla_j (u^k + v^k) = \partial_j (u^k + v^k) + (u^k + v^k)\Gamma^k_{ij} = \nabla_j u^k + \nabla_j v^k, \tag{2.224}$$

као и за обичну. Скраћено пишемо $\partial_j = \partial/\partial x^j$.

Пример 2.11.3. *Показати да је*

$$\nabla_j B_k = \partial_j B_k - B_i \Gamma^i_{kj}. \tag{2.225}$$

коваријантна деривација коваријантног вектора B_k.

Решење. Користимо деривацију скалара

$$\nabla_j (A^i B_i) = \partial_j (A^i B_i) = (\partial_j A^i) B_i + A^i (\partial_j B_i),$$

заједно са:

$$\nabla_j (A^i B_i) = (\nabla_j A^i) B_i + A^i (\nabla_j B_i) =$$
$$= (\partial_j A^i + A^k \Gamma^i_{kj}) B_i + A^i (\nabla_j B_i).$$

Изједначавањем добијамо:

$$(\partial_j A^i + A^k \Gamma^i_{kj}) B_i + A^i (\nabla_j B_i) = (\partial_j A^i) B_i + A^i (\partial_j B_i),$$

$$B_i A^k \Gamma^i_{kj} + A^i (\nabla_j B_i) = A^i (\partial_j B_i),$$

$$B_i A^k \Gamma^i_{kj} + A^k (\nabla_j B_k) = A^k (\partial_j B_k),$$

$$[B_i \Gamma^i_{kj} + (\nabla_j B_k)] A^k = A^k (\partial_j B_k).$$

Неме индексе i и k у другом и трећем члану можемо преименовати, а вектор A^k је произвољан, па налазимо:

$$B_i \Gamma^i_{kj} + (\nabla_j B_k) = \partial_j B_k,$$

а отуда тражена коваријантна деривација коваријантног вектора. □

Помоћу израза за деривације горњих (2.223) и доњих (2.225) индекса непосредно можемо написати израз за коваријантну деривацију било којег тензора, рецимо

$$\nabla_l C^i_{jk} = \partial_l C^i_{jk} + C^m_{jk} \Gamma^i_{lm} - C^i_{mk} \Gamma^m_{lj} - C^i_{jm} \Gamma^m_{lk}. \tag{2.226}$$

Применимо то на метрички тензор.

Пример 2.11.4. *Показати да је*

$$\nabla_j g_{kl} = 0. \tag{2.227}$$

Решење. Израчунавамо редом:

$$\nabla_j g_{kl} = \partial_j g_{kl} - \Gamma^m_{jk} g_{ml} - \Gamma^m_{jl} g_{km} =$$

$$= \nabla_j g_{kl} - \frac{1}{2} g^{mn}(\partial_k g_{jn} + \partial_j g_{nk} - \partial_n g_{kj}) g_{ml} - \frac{1}{2} g^{mn}(\partial_l g_{jn} + \partial_j g_{nl} - \partial_n g_{jl}) g_{km}$$

$$= \partial_j g_{kl} - \frac{1}{2}(\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{kj}) - \frac{1}{2}(\partial_l g_{jk} + \partial_j g_{kl} - \partial_k g_{lj})$$

$$= 0,$$

због симетрије $g_{ij} = g_{ji}$. Према томе, коваријантна деривација метричког тензора је нула, што је и требало показати. □

Пример 2.11.5. *Наћи коваријантну деривацију вектора*

$$\mathbf{v} = \left(1 - \frac{2GM}{r}, 0, 0, 0\right) \tag{2.228}$$

у Шварцшилдовој метрици.

Решење. Користимо раније израчунате Кристофелове симболе и добијамо

$$\nabla_j v^k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ \frac{3GM}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.229}$$

То је у сферном систему $Or\varphi\theta$. □

На крају погледајмо неколико типичних „задачића“ из наставе тензорског рачуна, који повезују појам паралелног транспорта са нашим претходним разматрањима.

Паралелно померање вектора A^k из тачке x у тачку $x + dx$ дуж координате x^j је:

$$A^k(x + dx) = A^k + \delta A^k = A^k(x) - \Gamma^k_{ij} A^i \delta x^j, \tag{2.230}$$

$$\frac{A^k(x + dx) - A^k(x)}{ds} = -\Gamma^k_{ij} A^k \frac{\delta x^j}{ds},$$

$$\frac{dA^k}{ds} + \Gamma^k_{ij} A^i A^j = 0,$$

а то је нама позната једначина геодезика (2.173).

При паралелном транспорту, вектор остаје паралелан тангенти у тачки $x + dx$, али не мења своју дужину, јер:

$$\delta(A^k A^i g_{ki}) = 2(\delta A^k) A^i g_{ki} + A^k A^i \delta g_{ki} =$$

$$= -2\Gamma^k_{mn} A^m \delta x^n A^i g_{ki} + A^k A^i g_{ki,n} \delta x^n, \quad g_{ki,n} = \partial_n g_{ki}$$

$$= -g^{kj}(g_{jm,n} + g_{jn,m} - g_{mn,j}) g_{ki} A^m A^i \delta x^n + A^k A^i g_{ki,n} \delta x^n$$

$$= -(g_{im,n} + g_{in,m} - g_{mn,i}) A^m A^i \delta x^n + A^k A^i g_{ki,n} \delta x^n = 0.$$

На исти начин се може показати још општије, да унутрашњи (скаларни) производ вектора остаје непромењен након паралелног транспорта:

$$\delta(A^i B^j g_{ij}) = (\delta A^i)B^j g_{ij} + A^i(\delta B^j)g_{ij} + A^i B^j \delta g_{ij} = \tag{2.231}$$

$$= -\Gamma^i_{mn} A^m \delta x^n B^j g_{ij} - \Gamma^j_{mn} B^m \delta x^n A^i g_{ij} + A^i B^j g_{ij,n} \delta x^n$$

$$= -\frac{1}{2} g^{ik}(g_{km,n} + g_{kn,m} - g_{mn,k}) g_{ij} A^m B^j \delta x^j$$

$$= -\frac{1}{2} g^{jk}(g_{km,n} + g_{kn,m} - g_{mn,k}) g_{ij} B^m A^i \delta x^n + A^i B^j g_{ij,n} \delta x^n$$

$$= -\frac{1}{2}(g_{jm,n} + g_{jn,m} - g_{mn,j})(A^m B^j + A^j B^m)\delta x^n + A^i B^j g_{ij,n} \delta x^n,$$

$$\delta(A^i B^j g_{ij}) = 0. \tag{2.232}$$

Размотримо две инфинитезимално удаљене тачке $P(x^i)$, $Q(x^i + dx^i)$ и векторско поље A које узима вредности A^k у P и $A^k + dA^k$ у Q. Знамо да диференција dA^k није тензор, али да рецимо δA^k јесте. Доводимо поменута два вектора у исту тачку, одузимајући вектор $A^k + \delta A^k$ из Q од вектора A^k у P и добијамо коваријантни диференцијал $DA^k = dA^k - \delta A^k$, који јесте тензор, односно коваријантни вектор. Вектор $A^k + \delta A^k$ је паралелно транспортован, односно паралелно транслирани A^k из P у Q. Најпознатији облик ове нове диференције је $\delta A^k = -\Gamma^k_{li} A^l dx^i$, тако да је

$$DA^k = dA^k + \Gamma^k_{li} A^l dx^i = A^k_{;i} dx^i, \tag{2.233}$$

а то овде (2.223) пишемо $DA^k = \nabla_i A^k$ и називамо коваријантном деривацијом.

На почетку ове секције поменуту Риманову идеју можемо и овако интерпретирати. Паралелно транслирамо вектор дуж једне координате, а затим га паралелно транслирамо другом. Упоредимо тај поступак са обрнутим редоследом и ако резултат није исти, фактор разлике прогласимо Римановим тензором.

Пример 2.11.6. *Из разлике две коваријантне деривације коваријантне деривације извести Риманов тензор:*

$$R^k_{lji} = \partial_i \Gamma^k_{jl} - \partial_j \Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{il}. \tag{2.234}$$

Решење. Коваријантна деривација коваријантне деривације је, редом:

$$\nabla_i \nabla_j A^k = \partial_i(\nabla_j T^k) - \Gamma^m_{ij} \nabla_m T^k + \Gamma^k_{im} \nabla_j T^m \tag{2.235}$$

$$= \partial_i \partial_j T^k + \partial_i(\Gamma^k_{jm} T^m) - \Gamma^m_{ij}(\partial_m T^k + \Gamma^k_{ml} T^l) + \Gamma^k_{im}(\partial_j T^m + \Gamma^m_{jl} T^l)$$

$$= \partial_i \partial_j T^k + (\partial_i \Gamma^k_{jm}) T^m + (\partial_i T^m)\Gamma^k_{jm} - \Gamma^m_{ij}(\partial_m T^k + \Gamma^k_{ml} T^l) + \Gamma^k_{im}(\partial_j T^m + \Gamma^m_{jl} T^l).$$

Када деривирамо обрнутим редоследом (заменимо индексе i и j) и та два резултата одузмемо, добијамо

$$\nabla_i \nabla_j T^k - \nabla_j \nabla_i T^k = (\partial_i \Gamma^k_{jl} - \partial_j \Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{il}) T^l,$$

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) T^k = R^k_{lji} T^k,$$

а због произвољности вектора A^k следи тражена једнакост. □

2.12 Кривине простора

Римановим просторима називамо оне који имају метрику која се полако и глатко мења од тачке до тачке. То су простори у којима можемо користити тензорски рачун. Већ смо видели како егзистенција не-нула компоненти Римановог тензора указује на закривљеност Римановог простора. Други, мање поуздани начини примећивања закривљености у тим просторима су Ричијев тензор и скалар кривине.

Ричијев[26] тензор је два пута коварајантан. Добија се из Римановог тензора R^l_{jkl} контракцијом горњег са првим доњим индексом

$$R_{ki} = R^m_{mki}. \tag{2.236}$$

У Римановом простору X^n је Ричијев тензор симетричан: $R_{ik} = R_{ki}$. Траг Ричијевог тензора у односу на контраваријантни метрички тензор простора X^n је скалар

$$R = g^{ij} R_{ij} \tag{2.237}$$

који се назива *скалар кривине* или *инваријанта кривине* простора X^n. Компоненте Ричијевог тензора се могу[27] изразити помоћу чланова метричког тензора g_{ij} и његове детерминанте $g = \det(g_{ij})$

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \ln\sqrt{g}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^k_{mj} - \Gamma^m_{ij}\frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^m}, \tag{2.238}$$

где су Γ^k_{ij} Кристофелови симболи друге врсте у односу на тензор g_{ij}.

Поред ових, за разна израчунавања често користимо још неколико формула. Пре свега, производ матрица (g_{ij}) и (g^{ij}) је јединична матрица. Помоћу њих, метричких тензора (коваријантног и контраваријантног), преводимо Риманове тензоре:

$$R_{lijk} = g_{ls} R^s_{ijk}, \quad R^m_{ijk} = g^{ml} R_{lijk}. \tag{2.239}$$

Први пар индекса првог тензора је симетричан са другим паром, али су индекси унутар тих парова косо-симетрични:

$$R_{abcd} = R_{cdab}, \quad R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}. \tag{2.240}$$

Лако се доказују и тзв. први и други Бјанкијев идентитет:

$$\begin{cases} R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0, \\ R_{abcd;e} + R_{abde;c} + R_{abec;d} = 0, \end{cases} \tag{2.241}$$

где је рецимо $R_{abcd;e} = \partial_e R_{abcd}$.

Пример 2.12.1. *Наћи тензоре кривине за површину сфере.*

Решење. Метрика сфере у сферном систему $Or\varphi\theta$ је

$$ds^2 = r^2 \sin^2\varphi^2 + r^2 d\theta^2, \quad r = \text{const}. \tag{2.242}$$

---

[26]G. Ricci, "Atti R. Inst. Venelo", 53: 2 (1903–1904), pp. 1233–1239.

[27]Encyclopedia of Mathematics: `www.encyclopediaofmath.org`

па су метрички и њему инверзан тензор, редом

$$(g_{ij}) = r^2 \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = r^{-2} \begin{pmatrix} \sin^{-2}\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.243}$$

јер је $(g_{ij})(g^{ij})$ јединична матрица. Кристофелови симболи су

$$\Gamma^{\varphi}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{ctg}\theta \\ \operatorname{ctg}\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\theta}_{ij} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.244}$$

У 2-дим простору Риманов тензор има само једну независну компоненту коју ћемо узети за

$$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = \partial_\theta \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} + \Gamma^{k}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\theta}_{\theta k} - \Gamma^{k}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}_{k\varphi},$$

$$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta. \tag{2.245}$$

Ричијев тензор и скалар кривине су:

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{2}{r^2}. \tag{2.246}$$

□

Пример 2.12.2. *Наћи тензоре кривине за Шварцшилдову метрику.*

Решење. За Шварцшилдову метрику (2.183) смо већ израчунали Кристофелове симболе (2.191). Отуда Риманов тензор

$$R^{t}_{rtr} = \frac{2GM}{r^3}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \tag{2.247}$$

Како ово никада није нула, Шварцшилдово простор-време је свугде закривљено. Ипак, из $r \to \infty$ следи $R^{t}_{rtr} \to 0$, што значи да веома далеко од центра поља закривљеност исчезава. Међутим, све компоненте Ричијевог тензора су нуле

$$R_{ij} = 0, \tag{2.248}$$

па је и скалар кривине нула, $R = 0$. □

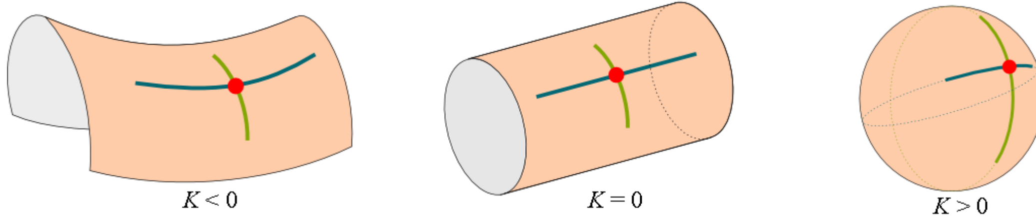
Како је могуће да је Ричијев тензор нула, а Риманов није? Формално гледајући ради се о степенима слободе. У просторима димензије 4 или више, има више степени слободе за Риманов тензор него за Ричијев, па има и више „места“ за равни Ричијев простор са не-нула кривином.

Са становишта Ајнштајнових једначина (2.97), Ричијев тензор може бити нула (у вакууму) зато што тензор енергије $T_{\mu\nu}$ не подржава закон одржања енергије[28]. То је зато што гравитација има свој сопствени (псеудо) тензор енергије, а само збир енергије и те псеудоенергије је конзервиран. Риманова кривина зависи од квадрата првих али и од других деривација метричког тензора, као и од самих метричких и њему инверзних тензора. Отуда, у вакууму може бити $R_{ij} = 0$ и $T_{ij} = 0$, а да псеудоенергије нису нуле,

[28] https://en.wikipedia.org/wiki/Stress%E2%80%93energy%E2%80%93momentum_pseudotensor

нити су константне (нпр. гравитациони таласи). Тада прве деривације метричких тензора не морају бити нуле, а са њима нити Риманов тензор.

Риман је био Гаусов ученик[29] од кога је наследио и разумевање кривина простора. Гаус је кривине површи дефинисао као реалне бројеве и поделио их на негативне, нула и позитивне ($K \lesseqgtr 0$), као на слици 2.25, а сам појам паралелности је проблематичан на тим разним површима.



Slika 2.25: Гаусове кривине.

Оне површи у којима важи Еуклидова геометрија имају кривину нула ($K = 0$). Збир углова у троуглу увек је испружен угао (180°). У њима важи Питагорина теорема $a^2 + b^2 = c^2$ за све правоугле троуглове са катетама a и b и хипотенузом c. Однос обима $\mathcal{O}$ и пречника круга $d = 2r$ увек је исти и једнак је ирационалном броју $\pi = 3,14159\dots$ независно од величине круга ($\mathcal{O} : d = \pi$). Важи тзв. Еуклидов пети постулат: дата тачка ван дате праве садржи тачно једну праву паралелну са датом. Иначе, две праве су паралелне ако леже у истој равни а немају заједничких тачака.

Унутрашња геометрија сфере има кривину $K > 0$. Троугао чије странице иду од севера линијама два меридијана и екватором, има збир углова већи од 180°, а слично је и са свим осталим троугловима јер су му странице чине делови великих кружница сфере. За правоугле троуглове важи неједнакост $a^2 + b^2 > c^2$. Однос обима и пречника круга мањи је од π. Све праве (велике кружнице) се секу и нема паралелних. Сличне сфери су све елиптичне површи, које називамо и Римановим.

Хиперболне или седласте површи имају кривину $K < 0$. То су оне са геометријом Лобачевског[30]. Тачка ван дате праве садржи бар две паралеле са датом, однос обима и пречника круга је већи од π, а збир углова у троуглу мањи је од испруженог. Не важи Питагорина теорема, катете су увек прекратке.

Посматрајући кружницу полупречника $\rho \to \infty$ долазимо до идеје да кривину површи дефинишемо са $\kappa = 1/\rho$, сматрајући праве линије дате површи кружницама неке шире геометрије. Производ полупречника две такве кружнице, $K = \kappa_1\kappa_2$, дефинише кривине на слици 2.25. Мана ове методе је потреба излазка у простор у којем нисмо.

Гаус је 1827. године открио начин дефинисања кривине површи изнутра, без одласка у више димензије. Из дате тачке, он би дуж геодезика отишао на удаљеност ϵ у свим правцима, покривајући круг полупречника ϵ. Упоређивање обима тог круга са обимом круга у равном простору $2\pi\epsilon$, открило би геометрију површи. На пример, за сферу полупречника ρ биће

$$\mathcal{O} = 2\pi\rho \sin\frac{\epsilon}{\rho} \approx 2\pi\epsilon\left(1 - \frac{\epsilon^2}{6\rho^2}\right). \tag{2.249}$$

У сложенијим површима овај израз је сложенији, али је девијација углавном квадратна,

[29]Carl Friedrich Gauss (1777-1855), немачки математичар.
[30]Лобачевский, Николай Иванович (1792-1856), руски математичар.

као што је и овде. Гаус је затим предложио следећу дефиницију кривине

$$K = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{6}{\epsilon^2} \left(1 - \frac{\mathcal{O}}{2\pi\epsilon} \right). \tag{2.250}$$

Испада да овај унутрашњи рачун даје управо онај претходно поменути производ две вањске кривине.

Наравно, временом су објављивани и другачије дефиниције кривина од ове Гаусове, као и другачије интерпретације Римановог тензора од (2.234). Једна популарнија међу математичарима је

$$K\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = R_{lijk} u^l v^i u^j v^k, \tag{2.251}$$

где је K Гаусова кривина, $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ површина паралелограма којег разапињу дати вектори $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а R_{lijk} је Риманов тензор (2.239). Међутим, физичари радије користе следећу интерпретацију

$$\delta A^l = -R^l_{ijk} A^i u^j v^k, \tag{2.252}$$

где је вектор $\mathbf{A}$ паралелно померан око малог паралелограма дефинисаног векторима $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Разлике крајњег и почетног вектора $\mathbf{A}$ износе δA^l.

Ево још једне интерпретације згодне за разумевање Ајнштајнове опште теорије. Посматрајмо неку фамилију геодезика $x^\mu(s,t)$, где је s параметар а t означава ток геодезика. Тада је $S^\mu = dx^\mu/ds$ вектор који описује кретање од једне геодезијске линије до друге, а $T^\mu = dx^m u/dt$ вектор који описује ток дуж геодезика. Друга коваријантна деривација

$$\nabla_{tt} S^\mu = -R^\mu_{\nu\eta\sigma} S^\eta T^\nu T^\sigma, \tag{2.253}$$

представља убрзање тока геодезика. Када $\mathbf{S}$ представља разлику између два објекта, онда $\mathbf{T}$ представља њихово узајамно кретање, па једначина описује њихово релативно убрзање.

Ричијев тензор је, просто речено, нека средња вредности Римановог. Прецизније, нека је дат вектор $\mathbf{v}$ и скуп на њега окомитих вектора $\mathbf{u}_\sigma$. Средњу вредност кривина свих равни у којима се појављује вектор $\mathbf{v}$ можемо изразити и помоћу окомитих вектора $\mathbf{u}_\sigma$. Кривину добијену помоћу $\mathbf{v}$ и свих вектора $\mathbf{u}_\sigma$ дефинише Риманов тензор, а његову средњу вредност у којој се појављује само вектор $\mathbf{v}$ дефинише Ричијев тензор.

Можемо посматрати и колекцију малих запремина простора. Опис релативног убрзања било које две од њих значи промену геодезика за које нам требају просеци по тим једначинама. За разлику од вектора, запремине се могу мењати чак и у равном простору, тако да сваку промену морамо упоредити са одговарајућом из равног простора. Мала запремина δV у близини тачке x^μ_0 креће се у правцу $T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ и налазимо

$$(\nabla_{\tau\tau}\delta V)_K - (\nabla_{\tau\tau}\delta V)_{K=0} = -\delta V\, R_{\mu\nu} T^\mu T^\nu, \tag{2.254}$$

где су $\nabla_{\tau\tau}$ друге коваријантне деривације. Скалар кривине (2.237), који је контракција Ричијевог тензора, има значење веома слично Гаусовој кривини. Када је број димензија простора $D > 2$, уместо формирања круга полупречника ϵ посматрамо сферу димензије $D - 1$ истог полупречника са центром у тачки x^μ_0. Ако је запремина дате сфере $V(\epsilon)$, а запремина одговарајуће сфере у равном простору $V_0(\epsilon)$, онда је

$$R = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{6D}{\epsilon^2} \left[1 - \frac{V(\epsilon)}{V_0(\epsilon)} \right] \tag{2.255}$$

скалар кривине.

Glava 3

Комплексна геометрија

Дошли смо до тачке када нам 4-дим простор-време теорије релативности постаје тесно. Та 4-дим позорница важи само за инерцијална кретања и велика генијалност Ајнштајнова је била потребна да би се један значајан део физике могао стрпати на тако мален подијум. Међутим, чим се појаве силе и убрзања на начин да их тело почне осећати, тај нам оквир постаје закривљен да, већ због (2.253), можемо постављати питање: „у оквиру које шире слике?“

Један правац ширења био би путем Калуза-Клајн идеја[1] насталих у време када и општа теорија релативности, а које даље доводе до данашње теорије струна. То је потрага за „теоријом свега“. Ми смо од тог наставка одустали већ у секцији 1.2 Васиона. Теорија струна се развија у реалним физичким просторима са десетак димензија, а овој теорији је потребно само пар додатних имагинарних димензија времена. Према томе, нити се сада уклапамо у теорију стуна, нити је оспоравамо.

Да овде нисмо у оквиру теорије струна, може се видети и из следећег. За ту данашњу „теорију сила“ помоћу малих струна (кончића), ентропија црних рупа и придружени парадокс губитка информације (колико је мени познато) су још увек необјашњиви. У овој теорији таквог парадокса већ у старту нема, јер сматрамо да се ентропија ближе центру масе тако смањује да на хоризонту догађаја (граници црне рупе) исчезава. Ентропија исчезава и време стаје из истог разлога, због нестанка неизвесности због закона великих бројева вероватноће. Зато на хоризонту догађаја нема производње, нити нестајања информације. Са друге стране, не видим зашто би ова теорија и теорија струна биле у супротности. Оне се баве различитим аспектима математичко-физичке реалности посматрајући је из сасвим различитих углова.

Важан правац ширења ове теме јесте квантна механика, али пре него што тамо кренемо требамо попунити неке празнине у познавању геометрије и комплексних бројева потребних у тој области. То су пре свега неколико елементарних теорема, ваљда познатих у математици ако не у аналитичкој геометрији, са којом се заправо бавимо у тексту који следи. Ово поглавље је посвећено координатној геометрији помоћу реалних и имагинарних бројева и њеној репрезентацији помоћу матрица, које такође симулирају реално-имагинарне комплексе. Тек затим, у следећој глави радићемо са надоградњом ове, примењеним на апстрактне просторе и на квантну физику. Имагинарне координате ће тада бити још важније због додатних димензија времена.

[1] Kaluza–Klein theory: `https://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza%E2%80%93Klein_theory`

3.1 Проширење бројева

Знамо да је скуп реалних бројева подскуп скупа комплексних бројева ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) и да је скуп комплексних бројева довољан за решење сваке полиномске једначине (основна теорема алгебре). Међутим, нама даље треба више имагинарних оса које се све могу везати за реалне и тек када видимо да је та форма могућа, имаће смисла уграђивати их у физику. Дакле, разматрамо поопштење скупа комплексних бројева.

Једна од једноставнијих надградњи скупа комплексних бројева је скуп матрица типа 2×2. Јединична матрица је

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Као што знамо, она је једина неутрална при множењу других матрица тако да за сваку матрицу $\hat{A}$ (истог типа) важи $\hat{I}\hat{A} = \hat{A}\hat{I} = \hat{A}$. Остале основне матрице поделићемо у две групе, према предзнаку на десној страни квадратне једнакости:

$$\hat{\sigma}^2 = \pm\hat{I}. \tag{3.2}$$

Решавањем ове једначине за предзнак плус (+) добијамо Паулијеве[2] матрице:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Решавањем горње једначине за предзнак минус (−) добијамо кватернионе:

$$\hat{\sigma}_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_6 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Матрице су нумерисане тако да је:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = i\hat{\sigma}_3 & \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3 = i\hat{\sigma}_1 & \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1 = i\hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_4\hat{\sigma}_5 = \hat{\sigma}_6 & \hat{\sigma}_5\hat{\sigma}_6 = \hat{\sigma}_4 & \hat{\sigma}_6\hat{\sigma}_4 = \hat{\sigma}_5, \end{cases} \tag{3.5}$$

где је $i = \sqrt{-1}$ имагинарни број. Поред тога је

$$\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_4 = \hat{\sigma}_6\hat{\sigma}_1 = i\hat{I}. \tag{3.6}$$

Иначе, множење матрица није комутативно.

Поред уобичајене употребе ових матрица, Паулијевих придружених спину фермиона а свих шест за представљање ротација, матрице кватерниона можемо употребити и за разликовање различитих имагинарних димензија времена.

Јединична матрица заједно са три Паулијеве (или кватернионске) чини комплетан скуп матрица типа 2×2. То значи да за произвољну матрицу $\hat{A}$ постоје јединствена четири броја x, y, u, v таква да је

$$x\hat{\sigma}_m + y\hat{\sigma}_n + u\hat{\sigma}_p + v\hat{I} = \hat{A}, \tag{3.7}$$

када су m, n, p редом индекси 1, 2 и 3 или су индекси 4, 5 и 6. Такве четири матрице могу да чине базу 4-дим векторског простора. Са друге стране то значи да се помоћу саме три матрице Паулија (или кватерниона) не може линеарним операцијама (вишеструким сабирањима) добити јединична матрица.

[2] Wolfgang Pauli (1900-1958), аустријско-швајцарски-амерички теоријски физичар.

Пример 3.1.1. *Показати да Паулијеве матрице са јединичном чине потпуни скуп.*

Решење. Полазимо од (3.6):

$$x\hat{\sigma}_1 + y\hat{\sigma}_2 + u\hat{\sigma}_3 + v\hat{I} = \hat{A},$$

$$x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}u+v & x-iy\\ x+iy & -u+v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} u+v=a \\ x-iy=b \\ x+iy=c \\ -u+v=d, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{c+b}{2} \\ y=i\frac{c-b}{2} \\ u=\frac{d-a}{2} \\ v=\frac{d+a}{2}. \end{cases}$$

Према томе, за произвољне унапред дате бројеве a, b, c, d увек постоје јединствени бројеви x, y, u, v, а то је оно што је требало показати. □

Пример 3.1.2. *Показати да кватерниони са јединичном матрицом чине потпуни скуп.*

Решење. Из (2.262) следи:

$$x\hat{\sigma}_4 + y\hat{\sigma}_5 + u\hat{\sigma}_6 + v\hat{I} = \hat{A},$$

$$x\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}ix+v & y+iu\\ -y+iu & -ix+v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

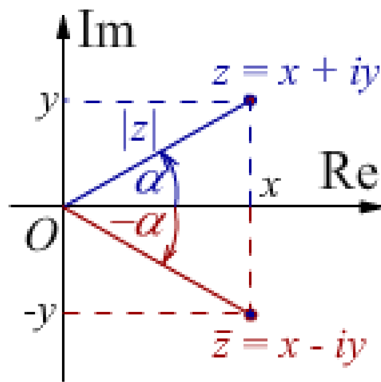
$$\begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\frac{a-d}{2} & \frac{b-c}{2}\\ -i\frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2}\end{pmatrix}.$$

За произвољне дате бројеве a, b, c, d постоје јединствени x, y, u, v, што је и требало показати. □

Формално 4-дим простор-време се може добити и са три Паулијеве матрице плус $\hat{\sigma}_4$, односно линеарна комбинација кватерниона која садржи $\hat{\sigma}_4$. Такву комбинацију кватерниона означимо са $\hat{\sigma}_0$ и назовимо временском димензијом. Према томе, након избора Паулијевих матрица за базу простора, постоји извесна несиметрија у избору матрица кватерниона, временских димензија. Штавише, у обрнутом случају, када бисмо бирали матрице кватерниона за базу простора, за четврту, временску димензију могли бисмо узети само јединичну матрицу.

Било који пар, од једне матрице кватерниона и једне од преостале четири, добро репрезентује скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$. Комплексан број $z = x+iy$, где су x и y реални бројеви, можемо представити тачком са координатама (x, y) у Декартовом систему. Апсцису (x-осу) тада чине реални делови комплексних бројева, а ординату (y-осу) имагинарни. Скуп свих комплексних бројева $\mathbb{C}$ тако постаје скуп тачака комплексне равни $\mathbb{C}$. Оваква репрезентација се види на слици 3.1.

Помоћу ове слике се лакше разумеју формуле и објашњења уз (2.53). Овде ту причу настављамо мало детаљније. Удаљеност од исходишта O до комплексног броја z, тачке



Slika 3.1: Комплексна раван $\mathbb{C}$.

z, назива се *модуо* комплексног броја z који пишемо $|z|$. Угао између позитивног смера реалне осе (апсцисе) и оријентисане дужи Oz назива се аргумент комплексног броја z који пишемо $\arg(z)$. Са слике 3.1 лако читамо:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho, \quad \arg(z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \alpha, \tag{3.8}$$

односно обрнуто:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\alpha. \tag{3.9}$$

Према томе, комплексни број $z = x + iy$ можемо писати:

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha). \tag{3.10}$$

То је репрезентација броја z у поларним координатама.

Теорема 3.1.3. *За све комплексне бројеве $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ важи:*

1. $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$;
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Доказ. 1. Непосредним множењем, због закона дистрибуције, добијамо:

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2,$$

одакле због закона комутације, груписањем сабирака следи тражена једнакост.

2. Из претходног израза налазимо:

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) = \rho\left(\frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\rho} + i\frac{x_1y_2 + y_1x_2}{\rho}\right), \tag{3.11}$$

где је $\rho = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2}$. Приметимо да је

$$\left(\frac{x_1x_2 - y_1y_2}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_1y_2 + y_1x_2}{r}\right)^2 = 1,$$

што значи да је $\rho = |z_1z_2|$, а разломци су $(x_1x_2 - y_1y_2)/\rho = \cos\alpha$ и $(x_1y_2 + y_1x_2)/\rho = \sin\alpha$, где је $\alpha = \arg(z_1z_2)$.

3. Покажимо да је угао α збир углова $\alpha_1 = \arg(z_1)$ и $\alpha_2 = \arg(z_2)$. Из:

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + i\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right), \tag{3.12}$$

следи да постоји угао α_1 такав да је:

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1}{\rho_1}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{y_1}{\rho_1}, \quad \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \tag{3.13}$$

јер је $\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 = 1$. Слично налазимо за z_2. Након тога користимо иначе познате адиционе формуле тригонометрије:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2$$

$$= \frac{x_1x_2}{\rho_1\rho_2} - \frac{y_1y_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$= \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2}}$$

$$= \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{(x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2) + (x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2)}}$$

$$= \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\rho},$$

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\alpha.$$

Такође налазимо $\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 = \sin\alpha$. □

То су били помало необични докази иначе познатих ставова. Такође је неуобичајен и доказ следеће теореме.

Заменом $i \to -i$ комплексни број $z = x + iy$ мењамо у њему *коњугован* $\bar{z} = x - iy$. У комплексној равни, коњуговано комплексни бројеви z и $\bar{z}$ су осно симетрични у односу на реалну осу, као што се види на слици 3.1.

Теорема 3.1.4. *За све комплексне бројеве $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ важи:*

1. $\bar{z}_1z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - y_1x_2)$;
2. $\Re(\bar{z}_1z_2) = |z_1||z_2|\cos\beta$;
3. $\Im(\bar{z}_1z_2) = |z_1||z_2|\sin\beta$;

где је $\beta = \angle z_1Oz_2$ угао између оријентисаних дужи Oz_1 и Oz_2.

Доказ. 1. Следи сменом $y_1 \to -y_1$ из претходне, став 1. теорема 3.1.3.

2. Применимо косинусну теорему на троугао Oz_1z_2:

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos\beta.$$

Отуда:

$$|z_1||z_2|\cos\beta = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) =$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[2x_1x_2 + 2y_1y_2] = \Re(\bar{z}_1z_2),$$

$$|z_1||z_2|\cos\beta = \Re(\bar{z}_1z_2),$$

што је и требало доказати.

3. Користимо тригонометријски идентитет $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, односно:

$$|z_1|^2|z_2|^2\sin^2\beta = |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2|z_2|^2\cos^2\beta =$$

$$= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2$$

$$= x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2$$

$$= (x_1y_2 - y_1x_2)^2 = \Im^2(\bar{z}_1z_2),$$

$$|z_1||z_2|\sin\beta = \Im(\bar{z}_1z_2),$$

што је и тражено. □

У аналогији са векторима, можемо дефинисати *скаларни производ* и интензитет *векторског* производа датих комплексних бројева, изразима:

$$z_1 \cdot z_2 = \Re(\bar{z}_1z_2), \quad |z_1 \times z_2| = \Im(\bar{z}_1z_2). \tag{3.14}$$

Овим дефиницијама доследно придружимо дефиниције[3] *сложеног збира* и *сложене разлике* комплексних бројева, редом:

$$z_1 \oplus z_2 = \frac{1}{2}(\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2), \quad z_1 \ominus z_2 = \frac{1}{2}(\bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2), \tag{3.15}$$

за које је лако проверити да важе једнакости:

$$z_1 \oplus z_2 = \Re(\bar{z}_1z_2), \quad z_1 \ominus z_2 = i\Im(\bar{z}_1z_2). \tag{3.16}$$

Први израз (збир) подсећа на „реални производ" комплексних бројева (тј. скаларни производ) из математичке литературе, али видећемо да у општем случају који се тамо подразумева - то није то.

У међувремену осврнућемо се на чисту геометрију. Она на први поглед изгледа толико реална да нема никакве везе са имагинарним бројевима, али опет када се сетимо комплексне равни и аналитичке геометрије, онда смо на корак и до општијег, још комплекснијег простор-времена. Када се једном види о чему би се у одговарајућој грани математике могло радити, само машта постаје граница, али нити у том случају нећемо ширити ову причу. Бар за сада. Осврнућемо се само на основне појмове елементарне геометрије, а и то само у оквиру троуглова, тек толико да бисмо видели снагу и универзалност ове помало нове, а старе методе.

Обрадићемо површину, неке особине троугла и круга помоћу комплексних бројева, само толико да отворимо врата.

[3] Називи које сам недавно дефинисао.

3.2 Тежиште

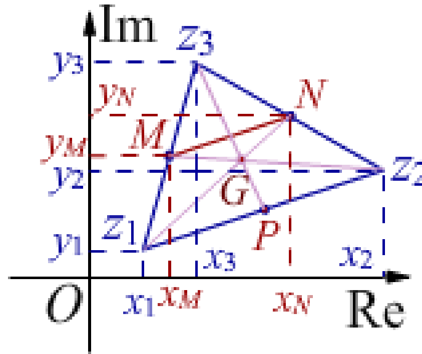
Оријентисана дуж од тачке O до тачке z у комплексној равни $\mathbb{C}$ може се посматрати као вектор $\overrightarrow{Oz}$, за различите комплексне бројеве $z = x+iy$. На пример, на троуглу $z_1z_2z_3$ на слици 3.2, средње тачке $M \in z_1z_3$ и $N \in z_2z_3$ су комплексни бројеви $z_M = \frac{1}{2}(z_1 + z_3)$ и $z_n = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$, па је вектор $\overrightarrow{MN}$ паралелан и једнак половини вектора $\overrightarrow{z_1z_2}$. Наиме, комплексни бројеви $z_M = z_1 + \frac{1}{2}(z_3 - z_1) = \frac{1}{2}(z_1 + z_3)$ и $z_N = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$ одређују вектор

$$\overrightarrow{MN} = z_N - z_M = \frac{1}{2}(z_2 + z_3) - \frac{1}{2}(z_1 + z_3) = \frac{1}{2}(z_2 - z_1), \tag{3.17}$$

или пола вектора $\overrightarrow{z_1z_2} = z_2 - z_1$. Уопште, за троугао на слици 3.2 важи:

$$z_M = \frac{1}{2}(z_1 + z_3), \quad z_N = \frac{1}{2}(z_3 + z_2), \quad z_P = \frac{1}{2}(z_2 + z_1). \tag{3.18}$$

Трећој средишњој тачки $P \in z_1z_2$ одговара комплексан број z_P. Све три средње линије z_1N, z_2M и z_3P секу се у тачки G коју називамо *тежиште троугла* или центар гравитације, са одговарајућим бројем $z_G \in z_1N \cap z_2M \cap z_3P$.



Slika 3.2: Complex plane $\mathbb{C}$.

Пример 3.2.1. *Проверити једнакост*

$$z_G = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3). \tag{3.19}$$

Решење. Имамо неколико еквивалентних једнакости (за неке $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$):

$$z_G = z_1 + \lambda_1(z_N - z_1), \quad z_G = z_2 + \lambda_2(z_M - z_2),$$

$$z_1 + \lambda_1(z_N - z_1) = z_2 + \lambda_2(z_M - z_2),$$

$$(2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)z_1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2)z_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)z_3 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3},$$

а отуда тражена једнакости. □

Такође, сабирајући векторе добијамо: $\overrightarrow{z_1z_G} + \overrightarrow{z_2z_G} + \overrightarrow{z_3z_G} =$

$$= (z_G - z_1) + (z_G - z_2) + (z_G - z_3) = 3z_G - z_1 - z_2 - z_3 = 0,$$

што значи да је (3.19) заједничка тачка датих вектора.

Пример 3.2.2. *Тежиште (G) је тачка која дели тежишнице у односу* $2:1$ *почев од темена троугла.*

Решење. $(z_G - z_1):(z_N - z_G) =$

$$= \left(\frac{z_1+z_2+z_3}{3} - z_1\right) : \left(\frac{z_2+z_3}{2} - \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right) =$$

$$= \frac{z_1+z_2-2z_3}{3} : \frac{3(z_1+z_2)-2(z_1+z_2+z_3)}{6}$$

$$= \frac{z_1+z_2-2z_3}{3} : \frac{z_1+z_2-2z_3}{6} = 2:1,$$

$$(z_G - z_1):(z_N - z_G) = 2:1, \tag{3.20}$$

што значи да тежиште дели тежишницу у датом односу. □

Пример 3.2.3. *Материјалне тачке* $z_1 = 1+2i$ *и* $z_2 = 2+i$ *и имају масе 1 и 2 грама, редом. Наћи њихов центар маса* z.

Решење. Означимо са $\ell = |z_2 - z_1| = \sqrt{2}$ растојање између материјалних тачака и са ℓ_1, ℓ_2 удаљености центра масе од прве односно друге тачке. Израчунавамо редом:

$$\ell_1 : \ell_2 = m_2 : m_1,$$

$$\ell_1 = \frac{m_2\ell}{m_1+m_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \ell_2 = \frac{m_1\ell}{m_1+m_2} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$z = z_1 + \frac{\ell(z_2-z_1)}{m_1+m_2} = (1+2i) + \frac{\sqrt{2}(1-i)}{3},$$

$$z = (1+\frac{\sqrt{2}}{3}) + i(2-\frac{\sqrt{2}}{3}).$$

Удаљености од исходишта су $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \approx 2,24$ и $|z| \approx 2,12$. □

Пример 3.2.4. *Тачке* $z_1 = 2+i$, $z_2 = 5$, $z_3 = 6+3i$ *и* $z_4 = 1+2i$ *су темена четвороугла. Наћи тежиште четвороугла.*

Решење. Четвороугао дијагонале деле на четири троугла са тежиштима:

$$G_1 = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}, \quad G_2 = \frac{z_2+z_3+z_4}{3}, \quad G_3 = \frac{z_3+z_4+z_1}{3}, \quad G_4 = \frac{z_4+z_1+z_2}{3},$$

$$G_1 = \frac{13+4i}{3}, \quad G_2 = \frac{12+5i}{3}, \quad G_3 = \frac{9+6i}{3}, \quad G_4 = \frac{8+3i}{3}.$$

Дужи G_1G_3 и G_2G_4 секу се у траженој тачки G. Зато, за непознате реалне параметре λ и μ важи:

$$G = G_1 + \lambda(G_3 - G_1) = G_2 + \mu(G_4 - G_2),$$

$$13 + 4i + \lambda(-4+2i) = 12 + 5i + \mu(-4-2i),$$

$$\lambda(-4+2i) + \mu(4+2i) = -1 + i,$$

$$(-4\lambda + 4\mu) + (2\lambda + 2\mu)i = -1 + i,$$

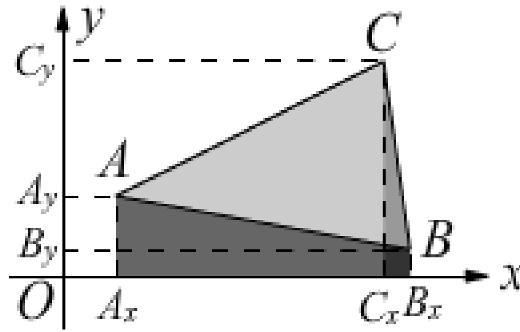
$$-4\lambda + 4\mu = -1, \quad 2\lambda + 2\mu = 1,$$
$$\lambda = \frac{3}{8}, \quad \mu = \frac{1}{8},$$
$$G = \frac{46 + 19i}{12}.$$

Исто G се добија са оба параметра. □

Решење из примера је модификован начин тражења тежишта четвороугла методом геометријске конструкције. Код општег многоугла та метода је непрактична, а сваки други присуп тражи нешто ново. За следећи поступак тражења тежишта полигона са $n = 3, 4, 5, \dots$ темена, потребно је израчунавати површине троуглова.

Поделимо дати многоугао на k дисјунктних троуглова. За сваки од тих троуглова Δ_j, $j = 1, 2, \dots, k$ нађимо тежиште G_j и површину Π_j. Скуп тежинских тачака тада је $T_j = \frac{\Pi_j}{\Pi} G_j$ где је Π површина многоугла. Збир свих T_j је тражено тежиште.

За тражење површине користимо троугао $A(A_x, A_y)$, $B(B_x, B_y)$ и $C(C_x, C_y)$ у правоуглим Декартовим координатама, на слици 3.3. Оријентисана површина $\Pi(ABC)$ тог троугла је површина трапеза A_xC_xCA плус C_xB_xBC минус A_xB_xBA.



Slika 3.3: Triangle ABC.

Отуда: $\Pi(ABC) = \Pi(A_xC_xCA) + \Pi(C_xB_xBC) - \Pi(A_xB_xBA) =$

$$= \frac{1}{2}(C_y + A_y)(C_x - A_x) + \frac{1}{2}(B_y + C_y)(B_x - C_x) - \frac{1}{2}(B_y + A_y)(B_x - A_x)$$

$$= \frac{1}{2}[A_x(B_y - C_y) + B_x(C_y - A_y) + C_x(A_y - B_y)],$$

$$\Pi(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.21}$$

То је често кориштена формула аналитичке геометрије. Следећа је ређа:

$$2\Pi(ABC) = [A, B] + [B, C] + [C, A], \tag{3.22}$$

где је

$$[A, B] = A_xB_y - B_xA_y, \tag{3.23}$$

и слично за тачке B и C. Број $[A, B]$ назовимо *комутатор* тачака A и B.

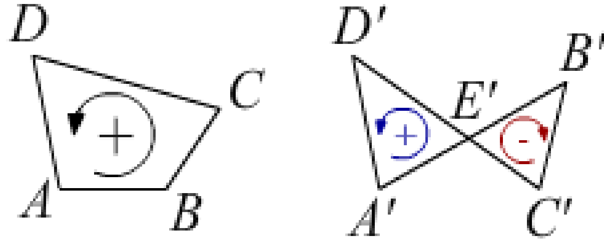
Теорема 3.2.5. *Када су дате три произвољне тачке A, B, C, тада:*

1. $[A, B] = -[B, A]$,
2. $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$ *за све скаларе* α *и* β,
3. $[A, B] = 0 \iff A - O - B$, *колинеарне тачке.*
4. $A - C - B \iff [A, B] = [A, C] + [C, B]$.

Доказ. 1. $[A, B] = A_x B_y - B_x A_y = -(B_x A_y - A_x B_y) = -[B, A]$.
2. $[\alpha A + \beta B, C] = (\alpha A_x + \beta B_x)C_x - C_x(\alpha A_y + \beta B_y) =$

$$= (\alpha A_x C_y - C_x \alpha A_y) + (\beta B_x C_y - C_x \beta B_y) = \alpha[A, C] + \beta[B, C].$$

3. $[A, B] = 0 \iff A_x B_y = B_x A_y \iff A_x : A_y = B_x : B_y$.
4. $[A, B] + [B, C] + [C, A] = 0 \iff [A, B] = -[B, C] - [C, A] = [A, C] + [C, A]$. □



Slika 3.4: Оријентисана површина.

На слици 3.4 лево, видимо да је површина конвексног четвороугла $ABCD$:

$$\Pi(ABCD) = \Pi(ABC) + \Pi(CDA) =$$

$$= ([A, B] + [B, C] + [C, A]) + ([C, D] + [D, A] + [A, C])$$
$$= ([A, B] + [B, C] + [C, D] + [D, A]) + ([C, A] + [A, C]),$$

$$\Pi(ABCD) = [A, B] + [B, C] + [C, A] + [A, D]. \tag{3.24}$$

Користећи комутаторе и претходну теорему лако налазимо и површину неконвексног четвороугла на истој слици десно:

$$[A', B'] + [B', C'] + [C', D'] + [D', A'] =$$

$$= [A', E'] + [E', B'] + [B', C'] + [C', E'] + [E', D'] + [D', A']$$
$$= ([A', E'] + [E', D'] + [D', A']) + ([E', B'] + [B', C'] + [C', E'])$$
$$= \Pi(A'E'D') + \Pi(E'B'C') = \Pi(A'B'C'D'),$$

$$\Pi(A'B'C'D') = [A', B'] + [B', C'] + [C', D'] + [D', A']. \tag{3.25}$$

Обе површине, (3.24) и (3.25), пишу се на исти начин овим комутаторима.

Пример 3.2.6. *Тачке $A_1(2,1)$, $A_2(5,0)$, $A_3(6,3)$ и $A_4(1,2)$ су темена четвороугла. Наћи тежиште $T(T_x,T_y)$ четвороугла користећи површине.*

Решење. Поделимо дати четвороугао дијагоналом A_1A_3 на два дисјунктна троугла. Израчунавамо површине и проверавамо теорему:

$$\begin{cases} 2\Pi(A_1A_2A_3A_4) = [A_1,A_2]+[A_2,A_3]+[A_3,A_4]+[A_4,A_1] = 16, \\ 2\Pi_1(A_1,A_2,A_3) = [A_1,A_2]+[A_2,A_3]+[A_3,A_1] = 10, \\ 2\Pi_2(A_3,A_4,A_1) = [A_3,A_4]+[A_4,A_1]+[A_1,A_3] = 6. \end{cases}$$

Тежишта, а затим тежински делови првог и другог троугла су:

$$G_1\left(\frac{2+5+6}{3},\frac{1+0+3}{3}\right), \quad G_2\left(\frac{6+1+2}{3},\frac{3+2+1}{3}\right),$$

$$T_1 = \frac{5}{8}\cdot G_1, \quad T_2 = \frac{3}{8}\cdot G_2,$$

$$T = T_1+T_2 = \frac{5}{8}\cdot\left(\frac{13}{3},\frac{4}{3}\right)+\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{9}{3},\frac{6}{3}\right) = \left(\frac{5\cdot13+3\cdot9}{24},\frac{5\cdot4+3\cdot6}{24}\right),$$

$$T = \left(\frac{46}{12},\frac{19}{12}\right).$$

То је резултат једнак са оним из претходног примера. □

Друга формула коју можемо користити за тражење тежишта полигона са теменима (x_k,y_k), за $k=1,2,\dots,n$ редом, је

$$\begin{aligned} g_x &= \tfrac{1}{6\Pi}\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}(x_k+x_{k+1})(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k), \\ g_y &= \tfrac{1}{6\Pi}\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}(y_k+y_{k+1})(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k), \end{aligned} \tag{3.26}$$

где је Π површина датог полигона, а координате тежишта су (g_x,g_y).

Пример 3.2.7. *Наћи тежиште четвороугла из претходног примера формулом (3.26).*

Решење.

$$\begin{aligned} g_x &= \tfrac{1}{6\cdot8}[(2+5)(2\cdot0-5\cdot1)+(5+6)(5\cdot3-6\cdot0)+(6+1)(6\cdot2-1\cdot3)+(1+2)(1\cdot1-2\cdot2)] \\ g_y &= \tfrac{1}{6\cdot8}[(1+0)(2\cdot0-5\cdot1)+(0+3)(5\cdot3-6\cdot0)+(3+2)(6\cdot2-1\cdot3)+(2+1)(1\cdot1-2\cdot2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_x &= \tfrac{1}{48}[7(-5)+11\cdot15+7\cdot9+3(-3)] = \tfrac{184}{48} = \tfrac{46}{12} \\ g_y &= \tfrac{1}{48}[1(-5)+3\cdot15+5\cdot9+3(-3)] = \tfrac{76}{48} = \tfrac{19}{12}, \end{aligned}$$

а то је резултат једнак са оним из претходних примера. □

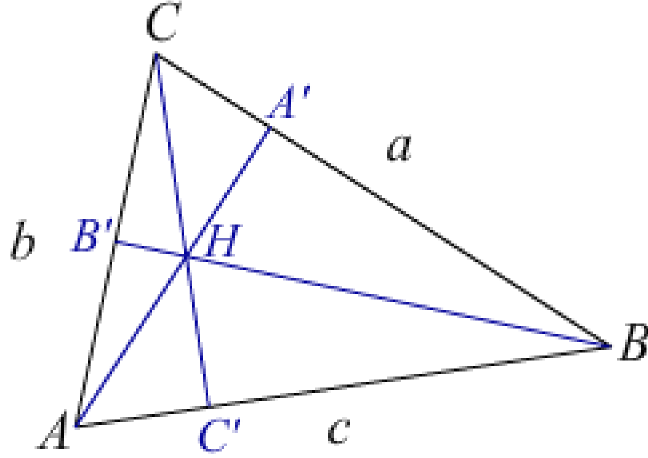
Уопште, тежиште (центар гравитације) је геометријско својство објекта. То је место просечне тежине којим се може описати кретање датог објекта, његова ротација или транслација. За дискретан скуп $n\in\mathbb{N}$ тачака G_k са масама m_k, где индекс узима вредности $k=1,2,\dots,n$, тежиште је

$$G = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_kG_k, \quad m = \sum_{k=1}^{n} m_k. \tag{3.27}$$

Међутим, полигони су фигуре, па већ за $n>3$ при тражењу тежишта n-то угла треба израчунати интеграл по целој фигури. Зато формула (3.27) примењена на теменима, неће дати исто тежиште као (3.26), које се односи на тело многоугла.

3.3 Површина

За означавање темена и страница троугла ABC користимо слику 3.5. Темена су комплексни бројеви $A = A_x + iA_y$, $B = B_x + iB_y$ и $C = C_x + iC_y$, где $A_x, A_y, \dots, C_y \in \mathbb{R}$. Странице наспрам темена су $a = a_x + ia_y = C - B$, $b = b_x + ib_y = A - C$ и $c = c_x + ic_y = B - A$. Ти бројеви су вектори комплексне равни.



Slika 3.5: Троугао ABC у комплексној равни $\mathbb{C}$.

Теорема 3.3.1. *Двострука оријентисана површина*[4] $\Pi = \Pi(ABC)$ *износи:*

$$2\Pi = \Im(\bar{a}b) = \Im(\bar{b}c) = \Im(\bar{c}a), \tag{3.28}$$

а $\Im(a\bar{b}) = \Im(b\bar{c}) = \Im(c\bar{a}) = -2\Pi$.

Доказ. Циљајући ка (3.22) налазимо: $\Im(a\bar{b}) = \Im[(C-B)\overline{(A-C)}] =$

$$= \Im[(C-B)(\bar{A}-\bar{C})] = \Im(C\bar{A} - C\bar{C} - B\bar{A} + B\bar{C}) =$$

$$= \Im[(C_x + iC_y)(A_x - iA_y) - (C_x + iC_y)(C_x - iC_y)$$

$$-(B_x + iB_y)(A_x - iA_y) + (B_x + iB_y)(C_x - iC_y)]$$

$$= \Im[(C_xA_x - iC_xA_y + iC_yA_x + C_yA_y) - (Cx^2 + C_y^2)$$

$$-(B_xA_x - iB_xA_y + iB_yA_x + B_yA_y) + (B_xC_x - iB_xC_y + iB_yC_x + B_yC_y)]$$

$$= -C_xA_y + C_yA_x + B_xA_y - B_yA_x - B_xC_y + B_yC_x$$

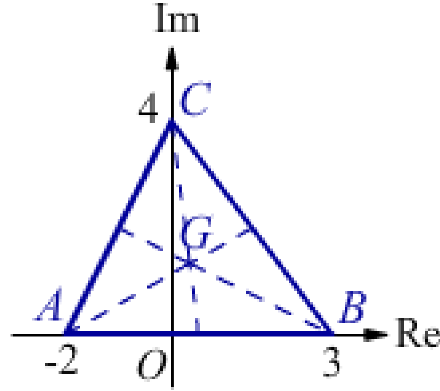
$$= -[C,A] - [A,B] - [B,C] = -2\Pi.$$

Симетрично, добијамо $\Im(b\bar{c}) = \Im(c\bar{a}) = -2\Pi$. Коњуговано $z = a\bar{b}$ је $\bar{z} = \bar{a}b$ а имагинарни део $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$, па имамо (3.22). □

Пример 3.3.2. *За троугао* $A(-2,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$ *наћи тежиште и површину.*

---

[4] Површине сам означавао и са μ.



Slika 3.6: Троугао $A = -2$, $B = 3$, $C = 4i$.

Решење. Темена датог троугла су $A = -2$, $B = 3$ и $C = 4i$. Тежиште је:

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i.$$

што се може видети на слици 3.6. За странице из темена C имамо:

$$a = C - B = -3 + 4i, \quad b = A - C = -2 - 4i,$$

$$\bar{a}b = (-3-4i)(-2-4i) = -10 + 20i,$$

$$2\Pi = \Im(\bar{a}b) = 20.$$

Тако, површина троугла је $\Pi = 10$. □

Теорема 3.3.3. *Двострука оријентисана површина* $\Pi = \Pi(ABC)$ *износи:*

$$2\Pi = \Im(\bar{A}B) + \Im(\bar{B}C) + \Im(\bar{C}A).$$

Доказ. Из:

$$\begin{cases} \bar{A}B = (A_x - iA_y)(B_x + iB_y) = (A_xB_x + A_yB_y) + i(A_xB_y - A_yB_x) \\ \bar{B}C = (B_x - iB_y)(C_x + iC_y) = (B_xC_x + B_yC_y) + i(B_xC_y - B_yC_x) \\ \bar{C}A = (C_x - iC_y)(A_x + iA_y) = (C_xA_x + C_yA_y) + i(C_xA_y - C_yA_x), \end{cases}$$

следи:

$$\Im(\bar{A}B) + \Im(\bar{B}C) + \Im(\bar{C}A) =$$

$$= (A_xB_y - A_yB_x) + (B_xC_y - B_yC_x) + (C_xA_y - C_yA_x)$$

$$= (B_xC_y - B_yC_x) - (A_xC_y - A_yC_x) + (A_xB_y - A_yB_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\Pi,$$

а то је (3.21), што је и требало доказати. □

Пример 3.3.4. *Наћи површину троугла:*
1. $A(-2,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$; *2.* $A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(0,4)$;
користећи теорему 3.3.3.

Решење. 1. За комплексне бројеве $A = -2$, $B = 3$ и $C = 4i$, коњуговани су $\bar{A} = -2$, $\bar{B} = 3$ и $\bar{C} = -4i$, па добијамо: $\bar{A}B = -6$, $\bar{B}C = 12i$ и $\bar{C}A = 8i$. Тада:

$$2\Pi = \Im(\bar{A}B) + \Im(\bar{B}C) + \Im(\bar{C}A) = 0 + 12 + 8 = 20.$$

Тако, површина троугла ABC је $\Pi = 10$.

2. За комплексне бројеве $A = 1$, $B = 5$ и $C = 4i$ имамо:

$$2\Pi = \Im(\bar{A}B) + \Im(\bar{B}C) + \Im(\bar{C}A)$$

$$= \Im(5) + \Im(20i) + \Im(-4i)$$

$$= 0 + 20 - 4 = 16,$$

отуда, површина је $\Pi = 8$. □

Висина троугла је дуж која иде из темена окомито на супротну страницу, основицу троугла. Да бисмо нашли површину троугла множимо дужине основице и одговарајуће висине и то делимо са два. Ако је основица страница a, b или c тада је одговарајућа висина (слика 3.5) редом AA', BB' или CC'.

Знамо да се множењем комплексних бројева њихови модули множе а аргументи сабирају (теорема 3.1.3). Посебно, множењем имагинарном јединицом $i = \sqrt{-1}$ број се ротира за 90° око O. Примењено овде[5] то значи да је комплексан број $-ia$ окомит на a, а такође је $-ib \perp b$ и $-ic \perp c$.

Према томе, за неки реалан параметар $\lambda \in \mathbb{R}$ комплексни бројеви:

$$\begin{cases} A_h(\lambda) = A + h_a(\lambda) = A - \lambda a i \\ B_h(\lambda) = B + h_b(\lambda) = B - \lambda b i \\ C_h(\lambda) = C + h_c(\lambda) = C - \lambda c i, \end{cases} \tag{3.29}$$

су тачке негде на висинама AA', BB' и CC' редом.

На пример, $A_h(0) = A$, али $A_h(\lambda_a) = A'$ ако $\lambda_a = 2\Pi/|a|^2$. Наиме, из површине троугла $\Pi = \frac{1}{2}|a||h_a|$, за $\lambda_a = 2\Pi/|a|^2$ добијамо

$$|A' - A| = |(A - \lambda_a a i) - A| = |\frac{2\Pi}{|a|^2} a i| = \frac{2|\Pi|}{|a|} = |h_a|,$$

што значи $A' = A + h_a$. Тако:

$$\begin{cases} \lambda_a = 2\Pi/|a|^2 & \Rightarrow & A' = A + h_a(\lambda_a) = A - \lambda_a a i \\ \lambda_b = 2\Pi/|b|^2 & \Rightarrow & B' = B + h_b(\lambda_b) = B - \lambda_b b i \\ \lambda_c = 2\Pi/|c|^2 & \Rightarrow & C' = C + h_c(\lambda_c) = C - \lambda_c c i. \end{cases} \tag{3.30}$$

Отуда непосредно добијамо:

$$|a|^2\lambda_a + |b|^2\lambda_b + |c|^2\lambda_c = 6\Pi, \tag{3.31}$$

за параметре ламбда који дају тачке A', B', C', подножја висина.

Приметимо да су параметри ламбда позитивни реални бројеви и да подножја висина A', B' и C' могу бити изван троугла, на продужетку стране наспрам темена A, B или C редом.

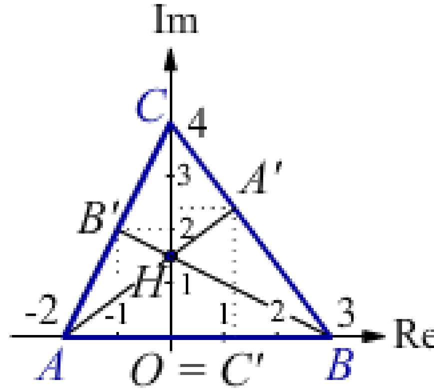
[5] Множење са $-i$ чува оријентацију дужи.

Пример 3.3.5. *Показати да важи пропорција:*

$$|a| : |b| : |c| = \frac{1}{|h_a|} : \frac{1}{|h_b|} : \frac{1}{|h_c|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_a}} : \frac{1}{\sqrt{\lambda_b}} : \frac{1}{\sqrt{\lambda_c}}. \tag{3.32}$$

Решење. Следи из једнакости површина $|a||h_a| = |b||h_b| = |c||h_c|$ и (3.30). □

Пример 3.3.6. *За троугао $A(-2,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$ наћи висине.*



Slika 3.7: Троугао $A = -2$, $B = 3$, $C = 4i$.

Решење. Видети слику 3.7. Темена и странице троугла су комплексни бројеви:

$$\begin{array}{lll} A = -2, & B = 3, & C = 4i, \\ a = -3 + 4i, & b = -2 - 4i, & c = 5. \end{array} \tag{3.33}$$

Површина троугла (слично примеру 3.3.2) износи:

$$\Pi(ABC) = \frac{1}{2}\Im(\bar{b}c) = \frac{1}{2}\Im[(-2+4i)5] = 10,$$

па према (3.30), параметри ламбда су:

$$\lambda_a = \frac{2\mu}{|a|^2} = \frac{20}{3^2+4^2} = \frac{4}{5}, \quad \lambda_b = 1, \quad \lambda_c = \frac{4}{5}.$$

Подножја висина су:

$$\begin{aligned} A' &= A - \lambda_a a i = -2 - \tfrac{4}{5}(-3+4i)i = \tfrac{6}{5} + \tfrac{12}{5}i, \\ B' &= B - \lambda_b b i = 3 - (-2-4i)i = -1 + 2i, \\ C' &= C - \lambda_c c i = 4i - \tfrac{4}{5} \cdot 5i = 0. \end{aligned}$$

Отуда, тражене висине су:

$$\begin{array}{ll} h_a = A' - A = (\tfrac{6}{5} + \tfrac{12}{5}i) - (-2) = \tfrac{16}{5} + \tfrac{12}{5}i, & |h_a|^2 = 16, \\ h_b = B' - B = (-1+2i) - 3 = -4 + 2i, & |h_b|^2 = 20, \\ h_c = C' - C = 0 - 4i = -4i, & |h_c|^2 = 16. \end{array}$$

Лако је проверити $|h_a|^2 : |h_b|^2 : |h_c|^2 = \lambda_a : \lambda_b : \lambda_c$, користећи (3.32). □

Лема 3.3.7. *За оријентисани троугао ABC важи*[6]*:*

$$A\bar{a} + B\bar{b} + C\bar{c} = 4i\Pi.$$

Доказ. Израчунавамо, ред по ред:

$$A\bar{a} + B\bar{b} + C\bar{c} = A(\bar{C} - \bar{B}) + B(\bar{A} - \bar{C}) + C(\bar{B} - \bar{A})$$

$$= A\bar{C} - A\bar{B} + B\bar{A} - B\bar{C} + C\bar{B} - C\bar{A}$$

$$= -A\bar{B} + B\bar{A} - B\bar{C} + C\bar{B} - C\bar{A} + A\bar{C}$$

$$= 2i\Im(\bar{A}B) + 2i\Im(\bar{B}C) + 2i\Im(\bar{C}A) = 4i\Pi,$$

што је и тврђено. □

Теорема 3.3.8. *За произвољан оријентисани троугао ABC важи:*

$$A'\bar{a} + B'\bar{b} + C'\bar{c} = -2i\Pi,$$

где су AA', BB' и CC' висине.

Доказ. Помножимо прву једначину (3.25) са $\bar{a}$, другу са $\bar{b}$, трећу са $\bar{c}$ и све саберимо:

$$A'\bar{a} + B'\bar{b} + C'\bar{c} = (A\bar{a} - \lambda_a a\bar{a}i) + (B\bar{b} - \lambda_b b\bar{b}i) + (C\bar{c} - \lambda_c c\bar{c}i)$$

$$= (A\bar{a} + B\bar{b} + C\bar{c}) - i(|a|^2\lambda_a + |b|^2\lambda_b + |c|^2\lambda_c),$$

тада због леме 3.3.7 и (3.31):

$$= 4i\Pi - 6i\Pi = -2i\Pi,$$

а то је оно што је тражено. □

Пример 3.3.9. *Користећи сложени збир (3.16) за два комплексна броја $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, показати:*

1. $z_1 \oplus z_2 = x_1x_2 + y_1y_2$; *2.* $x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \iff z_1 \perp z_2$.

Решење. 1. $z_1 \oplus z_2 = \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) =$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - y_1x_2)],$$

$$z_1 \oplus z_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

2. Ако је $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ тада је $\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2} = -1$ или $\tan\alpha_1 \tan\alpha_2 = -1$, где $\alpha_1 = \arg(z_1)$ и $\alpha_2 = \arg(z_2)$, видети слику 3.1. То значи $\alpha_2 - \alpha_1 = 90^\circ$ односно $z_1 \perp z_2$. □

[6] Лема је мала теорема.

Овај пример је користан за препознавање и употребу ортогоналности када радимо са комплексним бројевима. На пример, покажимо да је $AA' \perp a$, у претходним условима. Наиме, $AA' \perp a \iff (h_c - A) \oplus a = 0$, али:

$$(h_c - A) \oplus a = (-\lambda_a ai) \oplus a = \frac{1}{2}[(-\lambda_a ai)\bar{a} + (\overline{-\lambda_a ai})a] =$$

$$= \frac{1}{2}[-\lambda_a a\bar{a}i + \lambda_a \bar{a}ai] = -\frac{1}{2}\lambda_a(a\bar{a} - \bar{a}a)i = 0.$$

Зато је $AA' \perp a$.

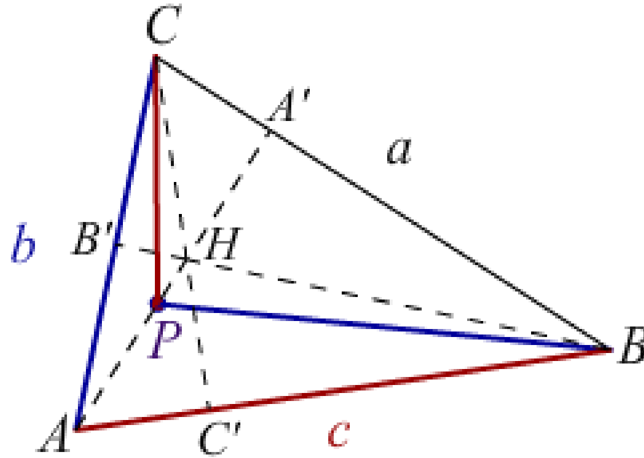
Сличном употребом комплексних бројева доказаћемо један познати став класичне геометрије. Пре тога, дефинишимо удаљеност између две тачке P и Q изразом:

$$d(P,Q) = |P - Q| = \sqrt{(P - Q)\overline{(P - Q)}}. \tag{3.34}$$

Користимо ту ознаку у следећем примеру.

Пример 3.3.10. *Нека је P тачка на висини AA'. Показати:*

$$d(A,C)^2 + d(B,P)^2 = d(B,A)^2 + d(C,P)^2. \tag{3.35}$$



Slika 3.8: Тачка P на висини AA'.

Решење. Нека је број $P = h_a(\lambda)$ и посматрајмо еквивалентне једнакости:

$$d(A,C)^2 + d(B,P)^2 = d(B,A)^2 + d(C,P)^2,$$

$$b\bar{b} + (h_a - B)\overline{(h_a - B)} = c\bar{c} + (h_a - C)\overline{(h_a - C)},$$

$$b\bar{b} + (-\lambda ai - c)\overline{(-\lambda ai - c)} = c\bar{c} + (-\lambda ai + b)\overline{(-\lambda ai + b)},$$

$$b\bar{b} + (-\lambda ai - c)(\lambda\bar{a}i - \bar{c}) = c\bar{c} + (-\lambda ai + b)(\lambda\bar{a}i + \bar{b}),$$

$$b\bar{b} + (\lambda^2 a\bar{a} + \lambda a\bar{c}i - \lambda\bar{a}ci + c\bar{c}) = c\bar{c} + (\lambda^2 a\bar{a} - \lambda a\bar{b}i + \lambda\bar{a}bi + b\bar{b}),$$

$$\lambda(a\bar{c} - \bar{a}c)i = \lambda(\bar{a}b - a\bar{b})i,$$

$$\Im(\bar{c}a) = \Im(\bar{a}b),$$

које су тачне, због $\Im(\bar{c}a) = \Im(\bar{a}b) = 2\Pi$ из (3.28). □

3.4 Ортоцентар

Претходну слику 3.5 користимо и овде, за означавање висина $AA' \perp a$, $BB' \perp b$, $CC' \perp c$ и ортоцентра H троугла ABC. Висина је нормала из темена на супротну страницу троугла, а ортоцентар је тачка у којој се секу (две) висине. Показати ћемо да се све три висине секу у једној тачки. У комплексној равни $\mathbb{C}$ дат је троугао са теменима A, B, C и наспрамним страницама a, b, c, комплексним бројевима:

$$\begin{cases} A = A_x + iA_y, & a = C - B = a_x + ia_y, \\ B = B_x + iB_y, & b = A - C = b_x + ib_y, \\ C = C_x + iC_y, & c = B - A = c_x + ic_y. \end{cases} \tag{3.36}$$

Коефицијенти $A_x, A_y, \dots, c_x, c_y$ су реални бројеви, а $i = \sqrt{-1}$ је имагинарна јединица.

Изаберимо неку тачку $P \in AA'$, као на слици 3.8, а нека је тачка H пресек висина BB' и CC'. Приметимо да је:

$$H = B + h_b(\nu_b) = B - \nu_b bi, \quad H = C + h_c(\nu_c) = C - \nu_c ci,$$

за неке за сада још увек непознате параметре $\nu_b, \nu_c \in \mathbb{R}$. То следи из (3.29). У складу са (3.34) пишемо:

$$d(A,C)^2 + d(B,H)^2 = d(B,A)^2 + d(C,H)^2,$$

$$|b|^2 + |\nu_b bi|^2 = |c| + |\nu_c ci|^2,$$

$$|b|^2(1 + \nu_b^2) = |c|^2(1 + \nu_c^2).$$

Ако бирамо тачку $P = AA' \cap BB'$ и поновимо поступак, добијамо:

$$\begin{cases} H = h_a(\nu_a) = A - \nu_a ai \\ H = h_b(\nu_b) = B - \nu_b bi \\ H = h_c(\nu_c) = C - \nu_c ci. \end{cases} \tag{3.37}$$

Ови реални параметри $\nu_a, \nu_b, \nu_c \in \mathbb{R}$ су у релацијама:

$$|a|^2(1 + \nu_a^2) = |b|^2(1 + \nu_b^2) = |c|^2(1 + \nu_c^2), \tag{3.38}$$

где су a, b, c одговарајуће странице троугла, као на слици 3.8.

Такође, постоји једна тачка пресека све три висине троугла. То је *ортоцентар* H дефинисан једнакостима (3.37), место где се секу висине троугла ABC.

Теорема 3.4.1. *За троугао ABC важи:*

$$|a|^2\nu_a + |b|^2\nu_b + |c|^2\nu_c = 4\Pi.$$

Доказ. Множимо (3.37) са $\bar{a}$, затим са $\bar{b}$, па са $\bar{c}$, а онда саберемо све три добијене једнакости. Налазимо:

$$H\bar{a} + H\bar{b} + H\bar{c} = (A\bar{a} - \nu_a a\bar{a}i) + (B\bar{b} - \nu_b b\bar{b}i) + (C\bar{c} - \nu_c c\bar{c}i),$$

$$H(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = A\bar{a} + B\bar{b} + C\bar{c} - i(\nu_a a\bar{a} + \nu_b b\bar{b} + \nu_c c\bar{c}),$$

али $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \overline{a + b + c} = 0$ и $z\bar{z} = |z|^2$, па:

$$|a|^2\nu_a + |b|^2\nu_b + |c|^2\nu_c = -i(A\bar{a} + B\bar{b} + C\bar{c})$$

$$= -i[A(\bar{C} - \bar{B}) + B(\bar{A} - \bar{C}) + C(\bar{B} - \bar{A})]$$
$$= -i[(A\bar{C} - C\bar{A}) + (B\bar{A} - A\bar{B}) + (C\bar{B} - B\bar{C})]$$
$$= -i[2i\Im(A\bar{C}) + 2i\Im(B\bar{A}) + 2i\Im(C\bar{B})]$$
$$= 2[\Im(\bar{A}B) + \Im(\bar{B}A) + \Im(\bar{C}A)] = 4\Pi,$$

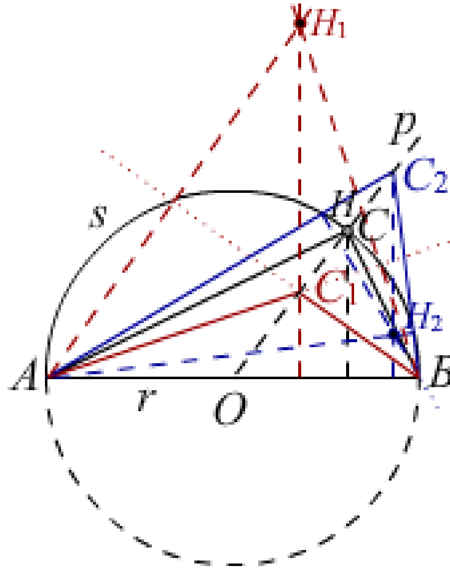
а то је оно што је требало доказати. □

3.4.1 Врсте троуглова

Разматрајући ортоцентар, требамо разликовати две врсте троуглова: тупоугле и оштроугле. Троугао је *тупоугли* ако има један тупи угао (већи од 90°) и два оштра (мања од 90°). Троугао који има сва три угла мања од 90° називамо *оштроуглим.* Троугао је *правоугли* ако му је један угао прав, са 90°. Оштроугли и тупоугли су различите врсте *косоуглих* троуглова, оних који нису правоугли.

Ортоцентар троугла може бити изван троугла само ако је троугао тупоугли. Друго, удаљеност од темена до ортоцентра тупоуглог троугла је дужа од одговарајуће висине, а краћа од ње ако је троугао оштроугли. Треће, збир квадрата две стране троугла може бити већи од квадрата треће стране, иако је збир две стране мањи од треће.

Да би ово разумели погледајмо слику 3.9. Полукруг s са центром O и полупречником r садржи тачке A, B и C, тако да је AB пречник. На правој p одређеном тачкама O и C налазе се још две тачке $C_1, C_2 \in p$, такве да је C_1 ближе O а C_2 даља од O. Према Талесовој теореми, ΔABC је правоугли ($\angle C = \gamma = 90°$) и лако је доказати да је ΔABC_1 тупоугли ($\gamma_1 > 90°$), а ΔABC_2 оштроугли ($\gamma_2 < 90°$).



Slika 3.9: Уписани угао $\angle ACB = 90°$ у полукруг.

Ортоцентар H правоуглог троугла ABC је у темену правог угла C. Ортоцентар H_1 тупоуглог ΔABC_1 је изван троугла. Ортоцентар H_2 оштроуглог ΔABC_2 је унутар троугла.

Иако све висине имају смер од темена ка подножју, смер ка ортоцентру може бити супротан (као C_1C_1' и C_1H_1). Отуда, коефицијенти λ су увек позитивни бројеви, али коефицијенти ν могу бити позитивни, нула или негативни (реални бројеви).

Збир $|a|^2 + |b|^2 - |c|^2$ је нула ако је троугао правоугли, негативан ако је троугао тупоугли, а позитиван за оштроугле троуглове. Наравно, у свим тим случајевима је тзв. неједнакост троугла, $|a| + |b| - |c| > 0$, тачна.

Пример 3.4.2. *Посебно за правоугли троугао $\angle C = 90°$ доказати:*
1. $|a|^2\nu_a + |b|^2\nu_b + |c|^2\nu_c = 4\Pi$;
2. $\nu_a\nu_b + \nu_b\nu_c + \nu_c\nu_a = 1$;

где је Π површина троугла ABC.

Доказ. 1. Имамо $|\nu_a ai| = |b|$, $|\nu_b bi| = |a|$, $|\nu_c ci| = 0$ и $\nu_a, \nu_b > 0$, па:

$$|\nu_a||a| = |b|, \quad |\nu_b||b| = |a|, \quad |\nu_c||c| = 0,$$

$$|a|^2\nu_a + |b|^2\nu_b + |c|^2\nu_c = |b||a| + |a||b| + 0 = 4\Pi,$$

што је и требало доказати.

2. Из $\nu_a = |b|/|a|$, $\nu_b = |b|/|a|$ и $\nu_c = 0$ следи:

$$\nu_a\nu_b + \nu_b\nu_c + \nu_c\nu_a = \frac{|b|}{|a|}\frac{|b|}{|a|} + 0 + 0 = 1.$$

где је $\Pi = \frac{1}{2}ab$ површина троугла ΔABC. □

Пример 3.4.3. *За тупоугли троугао доказати:*

$$\nu_a\nu_b + \nu_b\nu_c + \nu_c\nu_a = 1. \tag{3.39}$$

Доказ. У случају тупоуглог троугла, $\angle C > 90°$, на слици 3.9 можемо видети:

$$2\Pi(ABC) = 2\Pi(BH_1A) - 2\Pi(BH_1C_1) - 2\Pi(C_1H_1A) =$$

$$= \Im[(\overline{H_1 - B})(A - H_1)] - \Im[(\overline{H_1 - B})(C_1 - H_1)] - \Im[(\overline{H_1 - C_1})(A - H_1)]$$

$$= \Im[(\overline{-\nu_b bi})(\nu_a ai)] - \Im[(\overline{-\nu_b bi})(\nu_c ci)] - \Im[(\overline{-\nu_c ci})(\nu_a ai)]$$

$$= \Im[(\nu_b\bar{b}i)(\nu_a ai)] - \Im[(\nu_b\bar{b}i)(\nu_c ci)] - \Im[(\nu_c\bar{c}i)(\nu_a ai)]$$

$$= \Im(-\nu_b\nu_a\bar{b}a)] - \Im[(-\nu_b\nu_c\bar{b}c)] - \Im(-\nu_c\nu_a\bar{c}a)$$

$$= -\nu_b\nu_a\Im(\bar{b}a) + \nu_b\nu_c\Im(\bar{b}c) + nu_c\nu_a\Im(\bar{c}a)$$

$$= 2\nu_b\nu_a\mu + 2\nu_b\nu_c\mu + 2\nu_c\nu_a\mu,$$

$$\nu_a\nu_b + \nu_b\nu_c + \nu_c\nu_a = 1.$$

Због симетрије, ако бирамо други тупи угао, резултат је исти. □

Теорема 3.4.4. *За произвољан троугао ABC важи:*

$$\begin{cases} \nu_a a - \nu_b b = ic \\ \nu_b b - \nu_c c = ia \\ \nu_c c - \nu_a a = ib, \end{cases} \tag{3.40}$$

где су a, b, c странице оријентисане у смеру $A \to B \to C$.

Доказ. На слици 3.9 видимо тупоугли троугао ABC_1 са ортоцентром H_1. Разликујемо троуглове ΔABH_1, ΔC_1BH_1, ΔAC_1H_1, сва три позитивно оријентисана, обрнуто смеру казаљке на сату, попут ΔABH_1: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH_1} + \overrightarrow{H_1A} = 0$. Отуда:

$$\begin{cases} \Delta ABH_1: & c + (-\nu_b bi) + \nu_a ai = 0, \\ \Delta C_1BH_1: & -a + (-\nu_b bi) + \nu_c ci = 0, \\ \Delta AC_1H_1: & -b + (-\nu_c ci) + \nu_a ai = 0. \end{cases}$$

Позитиван смер иде из темена ка ортоцентру, тј. $AH_1 = -\nu_a ai$. Систем се може писати као (3.40).

У случају оштроуглог троугла ABC_2 са ортоцентром H_2 обилажењем малих троуглова ABH_2, BCH_2 и CAH_2 добијамо:

$$\begin{cases} \Delta ABH_2: & c + (-\nu_b bi) + \nu_a ai = 0, \\ \Delta BCH_2: & a + (-\nu_c ci) + \nu_b bi = 0, \\ \Delta CAH_2: & b + (-\nu_a ai) + \nu_c ci = 0, \end{cases}$$

а то је опет (3.40). □

Исти резултат (3.40) добијамо брже одузимањем једначина система (3.37), али са сумњом да ли резултат важи за све троуглове. Приметимо да су само две, било које две од ових једначина, независне.

3.4.2 Коефицијенти ортоцентра

Теорема 3.4.5. *За коефицијенте ν за H троугла ABC важи:*

$$\begin{cases} \nu_a = (-|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)/4\Pi, \\ \nu_b = (|a|^2 - |b|^2 + |c|^2)/4\Pi, \\ \nu_c = (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2)/4\Pi, \end{cases} \tag{3.41}$$

где је Π површина троугла.

Доказ. Из прве једначине у (3.40) имамо:

$$\nu_b b = \nu_a a - ic, \quad \nu_b \bar{b} = \nu_a \bar{a} + i\bar{c},$$

$$\nu_b^2 b\bar{b} = \nu_a^2 a\bar{a} + i\nu_a a\bar{c} - i\nu_a \bar{a}c + c\bar{c},$$

$$\nu_b^2 |b|^2 = \nu_a^2 |a|^2 - 4\Pi\nu_a + |c|^2.$$

Користећи (3.38) добијамо $|a|^2(1+\nu_a^2) = |b|^2(1+\nu_b^2)$, затим:

$$|a|^2 + |a|^2\nu_a^2 = |b|^2 + |b|^2\nu_b^2,$$

$$|a|^2 + |a|^2\nu_a^2 = |b|^2 + \nu_a^2|a|^2 - 4\Pi\nu_a + |c|^2,$$

$$4\Pi\nu_a = -|a|^2 + |b|^2 + |c|^2,$$

а отуда прва од једначина (3.41). Слично налазимо остале две. □

Ако је троугао оштроугли, тада су сва три броја ν_a, ν_b и ν_c позитивна. Али, ако је троугао тупоугли, онда је један угао већи од правог. На слици 3.9 имамо ситуацију $\angle C > 90^\circ$ са $|a|^2 + |b|^2 < |c|^2$ и $\nu_c < 0$.

Пример 3.4.6. *У троуглу* $A(-2,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$, *из примера 3.3.6, израчунати параметре* ν *за ортоцентар.*

Решење. Троугао је оштроугли. Погледајте 3.7 и (3.35). Израчунавамо $|a|^2 = 25$, $|b|^2 = 20$, $|c|^2 = 25$, па (3.41) даје:

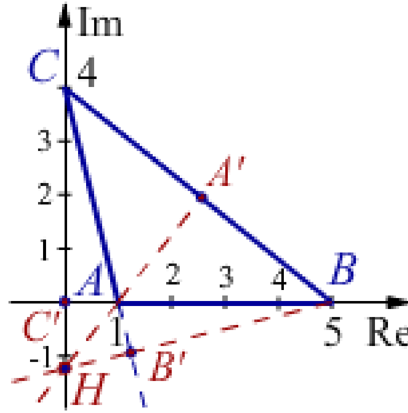
$$\nu_a = \frac{1}{2}, \quad \nu_b = \frac{3}{4}, \quad \nu_c = \frac{1}{2}.$$

Из (3.37) следи ортоцентар:

$$H = A - \nu_a ai = -2 - \frac{1}{2}(-3+4i)i = \frac{3}{2}i.$$

Било која од те три једначине (3.37) даје исти резултат. □

Пример 3.4.7. *Израчунати висине троугла* $A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(0,4)$.



Slika 3.10: Троугао $A = 1$, $B = 5$, $C = 4i$.

Решење. Користимо слику 3.10 и израчунавамо: $A = 1$, $B = 5$, $C = 4i$,

$$a = C - B = -5 + 4i, \quad b = A - C = 1 - 4i, \quad c = B - A = 4,$$

$$\bar{a} = -5 - 4i, \quad \bar{b} = 1 + 4i, \quad \bar{c} = 4,$$

$$|a|^2 = 41, \quad |b|^2 = 17, \quad |c|^2 = 16,$$

отуда $\Pi = \frac{1}{2}\Im(\bar{b}c) = 8$. Троугао је тупоугли ($\angle A > 90°$) због:

$$-|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = -41 + 17 + 16 = -8 < 0,$$

мада је $-|a| + |b| + |c| \approx 1.72 > 0$ и:

$$|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 = 41 - 17 + 16 = 40,$$

$$|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 = 41 + 17 - 16 = 42,$$

$$\nu_a = -\frac{8}{4\Pi} = -\frac{1}{4}, \quad \nu_b = \frac{40}{4\Pi} = \frac{5}{4}, \quad \nu_c = \frac{42}{4\Pi} = \frac{21}{16}.$$

Провера помоћу (3.39) потврђује резултат:

$$\nu_a\nu_b + \nu_b\nu_c + \nu_c\nu_a = -\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4} + \frac{5}{4}\cdot\frac{21}{16} - \frac{21}{16}\cdot\frac{1}{4} = 1.$$

Ортоцентар је представљен комплексним бројем:

$$H = A - \nu_a ai = 1 + \frac{1}{4}(-5+4i)i = -\frac{5}{4}i.$$

Висине можемо наћи из (3.30). Прво, параметри ламбда су:

$$\lambda_a = \frac{16}{41} \approx 0.39, \quad \lambda_b = \frac{16}{17} \approx 0.94, \quad \lambda_c = \frac{16}{16} = 1,$$

што значи да су дужине висина h_a, h_b и h_c редом 39%, 94% and 100% дужина страница a, b и c. Висине су:

$$h_a = -\lambda_a ai = -\frac{64}{41} - \frac{80}{41}i, \quad h_b = -\frac{64}{17} + \frac{16}{17}i, \quad h_c = 4,$$

$$|h_a| \approx 2.5, |h_b| = 3.9, \quad |h_c| = 4.$$

Проверавамо их помоћу површина:

$$\Pi = \frac{1}{2}|a||h_a| = 0.5\cdot\sqrt{41}\cdot 2.5 \approx 8.0,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}|b||h_b| = 0.5\cdot\sqrt{17}\cdot 3.9 \approx 8.0,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}|c||h_c| = 0.5\cdot 4\cdot 4 = 8.$$

Сва три резултата су тачна. □

Из претходних примера је видљиво да коефицијенти λ и ν немају линеарну пропорционалност. Погледајмо сада неке особине које ови коефицијенти имају.

3.4.3 Употреба тригонометрије

Теорема 3.4.8. *За коефицијенте ν из H троугла ABC важи:*

$$\begin{cases} |a|^2\lambda_a\nu_a = |b||c|\cos\alpha, \\ |b|^2\lambda_b\nu_b = |c||a|\cos\beta, \\ |c|^2\lambda_c\nu_c = |a||b|\cos\gamma, \end{cases} \tag{3.42}$$

где су $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$ и $\gamma = \angle C$ унутрашњи углови троугла.

Доказ. Користимо косинусну теорему

$$\begin{cases} |a|^2 = |b|^2 + |c|^2 - 2|b||c|\cos\alpha, \\ |b|^2 = |c|^2 + |a|^2 - 2|c||a|\cos\beta, \\ |c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\gamma, \end{cases} \tag{3.43}$$

прва једначина, заједно са првом од (3.41) даје:

$$2|b||c|\cos\alpha = -|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 4\mu\nu_a = 2|a||h_a|\nu_a = 2|a|^2\lambda_a\nu_a,$$

$$|b||c|\cos\alpha = |a|^2\lambda_a\nu_a.$$

Отуда прва једначина (3.42). Слично налазимо остале две. □

Теорема 3.4.9. *За коефицијенте* ν_a, ν_b *и* ν_c *из (3.37) важи:*

$$\nu_a : \nu_b : \nu_c = \Re(b\bar{c}) : \Re(c\bar{a}) : \Re(a\bar{b}). \tag{3.44}$$

где су a, b *и* c *странице троугла* ABC.

Доказ. Знамо да је $\Re(\bar{z}) = \Re(z) = x$ за сваки $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Примењујући $ic \perp c$ и (3.40):

$$(\nu_a a - \nu_b b) \oplus c = (ic) \oplus c,$$

$$\frac{1}{2}[(\nu_a a - \nu_b b)\bar{c} + (\overline{\nu_a a - \nu_b b})c] = \frac{1}{2}(ic\bar{c} - i\bar{c}c),$$

$$(\nu_a a\bar{c} - \nu_b b\bar{c}) + (\nu_a \bar{a}c - \nu_b \bar{b}c) = 0,$$

$$\nu_a(a\bar{c} + \bar{a}c) - \nu_b(b\bar{c} + \bar{b}c) = 0,$$

$$2\nu_a \Re(a\bar{c}) - 2\nu_b \Re(b\bar{c}) = 0,$$

јер $a\bar{c} + \bar{a}c = a\bar{c} + \overline{a\bar{c}} = 2\Re(a\bar{c})$. Слично налазимо све три:

$$\begin{cases} \nu_a : \nu_b = \Re(b\bar{c}) : \Re(a\bar{c}) \\ \nu_b : \nu_c = \Re(c\bar{a}) : \Re(b\bar{a}) \\ \nu_c : \nu_a = \Re(a\bar{b}) : \Re(c\bar{b}), \end{cases}$$

а отуда тражена пропорција (3.44). □

Теорема 3.4.10. *За коефицијенте (3.37) троугла* ABC *важи:*

$$\nu_a : \nu_b : \nu_c = \frac{\cos\alpha}{|a|} : \frac{\cos\beta}{|b|} : \frac{\cos\gamma}{|c|}, \tag{3.45}$$

где су α, β, γ *одговарајући унутрашњи углови троугла.*

Доказ. Користимо сложени збир (3.15):

$$b \oplus c = b_x c_x + b_y c_y = \Re(b\bar{c}), \tag{3.46}$$

где је $b = b_x + ib_y$, $c = c_x + ic_y$, затим $b_x = A_x - C_x$, ..., $c_y = B_y - A_y$. То је скаларни производ страница b и c троугла:

$$b \cdot c = b_x c_x + b_y c_y = |b||c|\cos\alpha',$$

где је $\alpha = \angle BAC$ унутрашњи угао између страица b и c а α' је суплементан[7]. То је због оријентисаних дужи са којима овде радимо. Зато:

$$\Re(b\bar{c}) = b_x c_x + b_y c_y = -|b||c|\cos\alpha, \tag{3.47}$$

Према томе:

$$\nu_a : \nu_b = (b \cdot c) : (c \cdot a) = (|b|\cos\alpha) : (|a|\cos\beta),$$

где $\beta = \angle CBA$. Отуда, уопште (3.45). □

Пример 3.4.11. *Проверити претходне три теореме за:* $A = -2$, $B = 3$, $C = 4i$.

[7] Два угла су суплементна када се допуњавају до 180 степени.

Решење. Странице и параметре већ имамо:

$$\begin{array}{lll} |a|^2 = 25, & |b|^2 = 20, & |c|^2 = 25, \\ \lambda_a = \frac{4}{5}, & \lambda_b = 1, & \lambda_c = \frac{4}{5}, \\ \nu_a = \frac{1}{2}, & \nu_b = \frac{3}{4}, & \nu_c = \frac{1}{2}, \end{array}$$

а из косинусне теореме (3.43) добијамо углове:

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha = \frac{-|a|^2+|b|^2+|c|^2}{2|b||c|} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.44721, & \alpha \approx 63.435^\circ \\ \cos\beta = \frac{|a|^2-|b|^2+|c|^2}{2|a||c|} = \frac{3}{5} = 0.6, & \beta \approx 53.130^\circ, \\ \cos\gamma = \frac{|a|^2+|b|^2-|c|^2}{2|a||b|} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.44721, & \gamma \approx 63.435^\circ. \end{array}$$

Сменом лако налазимо да је теорема 3.4.8 у реду. За следећу теорему:

$$\Re(b\bar{c}) : \Re(c\bar{a}) : \Re(a\bar{b}) =$$

$$\Re[(-2-4i)5] : \Re[5(-3-4i)] : \Re[(-3+4i)(-2+4i)] =$$

$$= (-10) : (-15) : (-10)$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \nu_a : \nu_b : \nu_c,$$

што значи да је и теорема 3.4.9 у реду. Такође:

$$\frac{\cos\alpha}{|a|} : \frac{\cos\beta}{|b|} : \frac{\cos\gamma}{|c|} = \frac{\sqrt{5}/5}{5} : \frac{3/5}{2\sqrt{5}} : \frac{\sqrt{5}/5}{5} = \nu_a : \nu_b : \nu_c,$$

што значи да је и теорема 3.4.10 тачно предвиђа. □

Пример 3.4.12. *Проверити претходне три теореме за:* $A = 1$, $B = 5$, $C = 4$.

Решење. Странице и параметри су:

$$\begin{array}{lll} a = -5+4i, & b = 1-4i, & c = 4, \\ |a|^2 = 41, & |b|^2 = 17, & |c|^2 = 16, \\ \lambda_a = \frac{16}{41}, & \lambda_b = \frac{16}{17}, & \lambda_c = 1, \\ \nu_a = -\frac{1}{4}, & \nu_b = \frac{5}{4}, & \nu_c = \frac{21}{16}, \end{array}$$

а из косинусне теореме добијамо углове:

$$\begin{array}{ll} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} \approx -0.24, & \alpha \approx 104^\circ \\ \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{41}} \approx 0.78, & \beta \approx 39^\circ \\ \cos\gamma = \frac{21}{\sqrt{41\cdot 17}} \approx 0.80, & \gamma \approx 37^\circ, \end{array}$$

За теорему 3.4.8 налазимо:

$$|a|^2\lambda_a\nu_a = |b||c|\cos\alpha,$$

$$41 \cdot \frac{16}{41} \cdot (-\frac{1}{4}) = \sqrt{17} \cdot 4 \cdot (-\frac{\sqrt{17}}{17}),$$

што је тачно. Слично, тачне су и остале две једнакости у (3.42). Према томе, тврђење теореме 3.4.8 је проверено.

За следећу теорему налазимо:

$$\Re(b\bar{c}):\Re(c\bar{a}):\Re(a\bar{b}) =$$

$$\Re[(1-4i)4]:\Re[4(-5-4i)]:\Re[(-5+4i)(1+4i)] =$$

$$= 4:(-20):(-21) = -\frac{1}{4}:\frac{5}{4}:\frac{21}{16} = \nu_a:\nu_b:\nu_c,$$

што значи да је и теорема 3.4.9 тачна. Такође:

$$\frac{\cos\alpha}{|a|}:\frac{\cos\beta}{|b|}:\frac{\cos\gamma}{|c|} = -\frac{\sqrt{17}/17}{\sqrt{41}}:\frac{5/\sqrt{41}}{\sqrt{17}}:\frac{21/\sqrt{41\cdot 17}}{4} = \nu_a:\nu_b:\nu_c,$$

па је и теорема 3.4.10 тачна. □

За општи троугао ABC употребом теореме 3.4.10 и синусне теореме:

$$\frac{|a|}{\sin\alpha} = \frac{|b|}{\sin\beta} = \frac{|c|}{\sin\gamma} = 2R, \tag{3.48}$$

где је R полупречник описаног круга троугла, добијамо:

$$\nu_a:\nu_b:\nu_c = \cot\alpha:\cot\beta:\cot\gamma. \tag{3.49}$$

Ово ће олакшати израчунавање коефицијената ортоцентра када су познати углови троугла, или обрнуто.

Први разлози ове опширности су чињеница да комплексни бројеви имају све важнију улогу у физици и да је ове једноставне формуле тешко (немогуће) наћи у математичкој литератури или на интернету.

Други, будући важан разлог биће значај троуглова у вишедимензионалним геометријама. Ма колико много координата имале три разне тачке A, B, C, оне увек припадају једној и само једној равни σ. Ма колико димензија имао простор у којем се налазе тачке A, B и C, раван σ је увек димензије два. То поједностављује геометријску анализу, а затим и све остале њене примене. Тражимо пресеке датог вишедимензионалног тела са равни, одвајајући трі по три материјалне тачке, а затим склапајући слику, наравно, на начине који нису увек тривијални. Као у поступку обраде коефицијента корелације и линије регресије масе статистичких података, приказан на крају књиге [1] у последњој секцији „3.6 Стереометрија статистике“.

Трећи разлог је лакоћа са којом се прелази са комплексних бројева на обичну геометрију, или на аналитичку геометрију, на алгебру, векторе, матрице, апстрактне просторе квантне механике. Разматрајући такве преласке као примере увек смо у дилеми да ли узети један па га детаљно разрадити или их многе овлаш набрајати. У наредном тексту сам се одлучио на први метод, који ћу демонстрирати на унутра уписаним и вани приписаним круговима троугла, третираних елементарном геметријом кроз алгебру детерминанти.

Анализе које следе могле би такође бити занимљиве јер их до сада нисам објављивао осим неформално недавно, а верујем да се неке од њих још увек не могу пронаћи у математичкој литератури. Само представљање резултата средњошколске геометрије детерминантама, чија обрада би некада била досадна и неприхватљиво опширна за тај ниво учења, развојем рачунарске технологије постаје све више интересантна.

3.5 Детерминанте центара троугла

Дат је троугао ΔABC координатама темена $A(A_x, A_y)$, $B(B_x, B_y)$, $C(C_x, C_y)$. Орјентисана површина троугла (3.12) је:

$$\Pi(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.50}$$

Ради комплетности претходног текста, овде ћемо видети елементарне изразе аналитичке геометрије са употребом детерминанти, али без комплексних бројева. Верујем да они нису новина у математици, али змам да их је тешко пронаћи, јер сам их недавно[8] морао наново откривати.

Странице троугла, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, леже на три праве линије:

$$\begin{cases} a: & (B_y - C_y)x - (B_x - C_x)y = C_x B_y - B_x C_y, \\ b: & (C_y - A_y)x - (C_x - A_x)y = A_x C_y - C_x A_y, \\ c: & (A_y - B_y)x - (A_x - B_x)y = B_x A_y - A_x B_y. \end{cases} \tag{3.51}$$

Приметимо да збир ове три једначине даје контрадикцију. Наиме, на левој страни збир је нула, а на десној је двострука површина троугла:

$$0 = -[A_x(B_y - C_y) + B_x(C_y - A_y) + C_x(A_y - B_y)],$$

тј. $0 = -2\Pi$, што је у реду само ако дате три праве нису конкурентне (немају заједничку тачку). Ради упоређивања, погледајмо једначине средњих линија троугла.

Средина дужи BC има координате

$$A_1\left(\frac{B_x + C_x}{2}, \frac{B_y + C_y}{2}\right)$$

и слично остале две странице $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Према томе, тежишнице $g_a = AA_1$, $g_b = BB_1$, $g_c = CC_1$ датог троугла леже на правама:

$$\begin{cases} g_a: & (G_y - A_y)x - (G_x - A_x)y = A_x G_y - G_x A_y, \\ g_b: & (G_y - B_y)x - (G_x - B_x)y = B_x G_y - G_x B_y, \\ g_c: & (G_y - C_y)x - (G_x - C_x)y = C_x G_y - G_x C_y, \end{cases} \tag{3.52}$$

где је употребљена смена $G(G_x, G_y)$ дата са:

$$G_x = \frac{A_x + B_x + C_x}{3}, \quad G_y = \frac{A_y + B_y + C_y}{3}. \tag{3.53}$$

Збир све три једначине тежишница даје идентитет $0 = 0$, што значи да постоји бар једна заједничка тачка за све три праве. Са друге стране, троугао не-нулте површине има три разне тежишнице које имају највише једну заједничку тачку. Зато имамо само једну тачку пресека коју називамо тежиште $G(G_x, G_y)$.

[8] Rastko Vukovic: *Determinants of the triangle centers*, Academia.edu, June 2014.

3.5.1 Детерминанте ортоцентра

Ортоцентар H троугла ΔABC је тачка пресека висина h_a, h_b, h_c.

Експлицитни облик прве од (3.51) једначина страница је уопште $y = mx + n$, где је $m = \frac{B_y - C_y}{B_x - C_x}$ прираштај, тангенс угла праве према x-оси, а $n = \frac{B_x C_y - C_x B_y}{B_x - C_x}$ је пресек праве са y-осом. Права окомита на дату има прираштај

$$m_\perp = -\frac{1}{m} = -\frac{B_x - C_x}{B_y - C_y}. \tag{3.54}$$

Права са тим прираштајем која пролази теменом A има једначину $y - A_y = m_\perp(x - A_x)$. Отуда, имплицитни облик једначина висина троугла је:

$$\begin{cases} h_a: & (B_x - C_x)x + (B_y - C_y)y = (B_x - C_x)A_x + (B_y - C_y)A_y, \\ h_b: & (C_x - A_x)x + (C_y - A_y)y = (C_x - A_x)B_x + (C_y - A_y)B_y, \\ h_c: & (A_x - B_x)x + (A_y - B_y)y = (A_x - B_x)C_x + (A_y - B_y)C_y. \end{cases} \tag{3.55}$$

Сабирањем све три једначине добијамо нуле на обе стране, што значи да постоји јединствена тачка пресека висина троугла, коју називамо ортоцентар троугла и означавамо $H(H_x, H_y)$. Штавише, можемо бирати било које две једначине овог система и као решење добити координате ортоцентра.

Теорема 3.5.1. *Пресек висина троугла је тачка*

$$H\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right), \tag{3.56}$$

коју називамо ортоцентар, где су детерминанте:

$$D = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\Pi. \tag{3.57}$$

$$D_x = -\begin{vmatrix} B_x C_x + B_y C_y & C_x A_x + C_y A_y & A_x B_x + A_y B_y \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{3.58}$$

$$D_y = +\begin{vmatrix} B_x C_x + B_y C_y & C_x A_x + C_y A_y & A_x B_x + A_y B_y \\ A_x & B_x & C_x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.59}$$

Доказ. Потражимо пресек $H \in h_a \cap h_b$. Решавамо систем прве две једначине из (3.55) помоћу детерминанти.

Детерминанта тог система је, редом:

$$D = \begin{vmatrix} B_x - C_x & B_y - C_y \\ C_x - A_x & C_y - A_y \end{vmatrix} = A_x(B_y - C_y) + B_x(C_y - A_y) + C_x(A_y - B_y)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\Pi,$$

тј. једнака је двострукој површини троугла ΔABC. Тиме је доказано (3.57).

Детерминанта x за исте прве две једначине је, редом:

$$D_x = \begin{vmatrix} (B_x - C_x)A_x + (B_y - C_y)A_y & B_y - C_y \\ (C_x - A_x)B_x + (C_y - A_y)B_y & C_y - A_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (B_x - C_x)A_x & B_y - C_y \\ (C_x - A_x)B_x & C_y - A_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (B_y - C_y)A_y & B_y - C_y \\ (C_y - A_y)B_y & C_y - A_y \end{vmatrix}$$

$$= [A_xB_x(B_y - A_y) + A_xC_x(A_y - C_y) + B_xC_x(C_y - B_y)] +$$
$$+ [A_yB_y(B_y - A_y) + A_yC_y(A_y - C_y) + B_yC_y(C_y - B_y)]$$

$$= -\begin{vmatrix} B_xC_x & A_xC_x & A_xB_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_yC_y & A_yC_y & A_yB_y \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} B_xC_x + B_yC_y & C_xA_x + C_yA_y & A_xB_x + A_yB_y \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тиме је доказано (3.58).

Детерминанта y је, редом:

$$D_y = \begin{vmatrix} B_x - C_x & (B_x - C_x)A_x + (B_y - C_y)A_y \\ C_x - A_x & (C_x - A_x)B_x + (C_y - A_y)B_y \end{vmatrix} =$$

$$= [(B_x - C_x)(C_xB_x - \underline{A_xB_x}) - (C_x - A_x)(\underline{B_xA_x} - C_xA_x)]$$
$$+ [(B_x - C_x)(C_yB_y - \underline{A_yB_y}) - (C_x - A_x)(\underline{B_yA_y} - C_yA_y)]$$

$$= [(B_x - C_x)C_xB_x + (A_x - B_x)B_xA_x + (C_x - A_x)C_yA_x]$$
$$+ [(B_x - C_x)C_yB_y + (A_x - B_x)B_yA_y + (C_x - A_x)C_yA_y]$$

$$= \begin{vmatrix} C_xB_x & C_xA_x & B_xA_x \\ A_x & B_x & C_x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_yB_y & C_yA_y & B_yA_y \\ A_x & B_x & C_x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} B_xC_x + B_yC_y & C_xA_x + C_yA_y & A_xB_x + A_yB_y \\ A_x & B_x & C_x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

То је доказ за (3.59).

Лако је проверити да избор друге две једначине система (3.55) даје исти резултат. Јединствено решење тога система је ортоцентар $H(H_x, H_y)$:

$$H_x = \frac{D_x}{D}, \ H_y = \frac{D_y}{D},$$

где су детерминанте D, D_x, D_y дате у теореми. □

3.5.2 Центар описаног круга

Центар описаног круга троугла је тачка F где се секу три нормале f_a, f_b, f_c, симетрале страница a, b, c троугла. То је центар круга који пролази теменима троугла.

Ако страница $a = BC$ троугла има прираштај m, њена симетрала f_a, окомита на ту страницу има прираштај $m_\perp = -\frac{1}{m}$, исти као и висина h_a. Али симетрала f_a пролази средином странице, тачком

$$A_1\left(\frac{B_x + C_x}{2}, \frac{B_y + C_y}{2}\right).$$

Једначина праве са датим нагибом кроз дату тачку је

$$y - A_{1y} = m_\perp(x - A_{1x}).$$

Након сређивања имамо имплицитну једначину праве f_a. На тај начин добијамо све три симетрале страница:

$$\begin{cases} f_a: & (B_x - C_x)x + (B_y - C_y)y = (B_x^2 - C_x^2 + B_y^2 - C_y^2)/2, \\ f_b & (C_x - A_x)x + (C_y - A_y)y = (C_x^2 - A_x^2 + C_y^2 - A_y^2)/2, \\ f_c: & (A_x - B_x)x + (A_y - B_y)y = (A_x^2 - B_x^2 + A_y^2 - B_y^2)/2. \end{cases} \tag{3.60}$$

То је завистан, сагласан систем, јер збир све три једначине даје сагласност „нула једнака нули“. Другим речима, постоји јединствено решење, тачка $F(F_x, F_y)$ која је центар описаног круга троугла чије координате задовољавају све три једначине (3.60).

Теорема 3.5.2. *Пресек симетрала страница је тачка:*

$$F\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right), \tag{3.61}$$

која се назива центар описаног круга, при чему је:

$$D = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\Pi, \tag{3.62}$$

$$D_x = +\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_x^2 + A_y^2 & B_x^2 + B_y^2 & C_x^2 + C_y^2 \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{3.63}$$

$$D_y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_x^2 + A_y^2 & B_x^2 + B_y^2 & C_x^2 + C_y^2 \\ A_x & B_x & C_x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.64}$$

Доказ. Тражимо пресек $F \in f_a \cap f_b$, тј. решавамо прве две једначине система (3.60) методом детерминанти. Детерминанта тог скраћеног система је очигледно иста као она за ортоцентар (3.57), тј. $D(F) = D(H) = 2\Pi(ABC)$, чиме је доказано (3.62).

Међутим, детерминанта x је, редом:

$$D_x = \begin{vmatrix} (B_x^2 - C_x^2 + B_y^2 - C_y^2)/2 & B_y - C_y \\ (C_x^2 - A_x^2 + C_y^2 - A_y^2)/2 & C_y - A_y \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} B_x^2 - C_x^2 + B_y^2 - C_y^2 & C_x^2 - A_x^2 + C_y^2 - A_y^2 \\ B_y - C_y & C_y - A_y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} B_x^2 - C_x^2 + B_y^2 - C_y^2 & C_x^2 - A_x^2 + C_y^2 - A_y^2 & C_x^2 + C_y^2 \\ B_y - C_y & C_y - A_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} B_x^2 + B_y^2 & -A_x^2 - A_y^2 & C_x^2 + C_y^2 \\ B_y & -A_y & C_y \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_x^2 + A_y^2 & B_x^2 + B_y^2 & C_x^2 + C_y^2 \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Према томе, друга детерминанта (3.63) је такође тачна.

Детерминанта варијабле y је:

$$D_y = \begin{vmatrix} B_x - C_x & (B_x^2 - C_x^2 + B_y^2 - C_y^2)/2 \\ C_x - A_x & (C_x^2 - A_x^2 + C_y^2 - A_y^2)/2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} (B_x^2 - C_x^2 + B_y^2 - C_y^2)/2 & B_x - C_x \\ (C_x^2 - A_x^2 + C_y^2 - A_y^2)/2 & C_x - A_x \end{vmatrix}.$$

Настављајући као за претходну детерминанту, сада добијамо:

$$D_y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_x^2 + A_y^2 & B_x^2 + B_y^2 & C_x^2 + C_y^2 \\ A_x & B_x & C_x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Па је тачно и (3.64).

Према томе, координате центра $F(F_x, F_y)$ описаног круга троугла су:

$$F_x = \frac{D_x}{D}, \; F_y = \frac{D_y}{D},$$

Што је и требало доказати. □

3.5.3 Ојлерова права

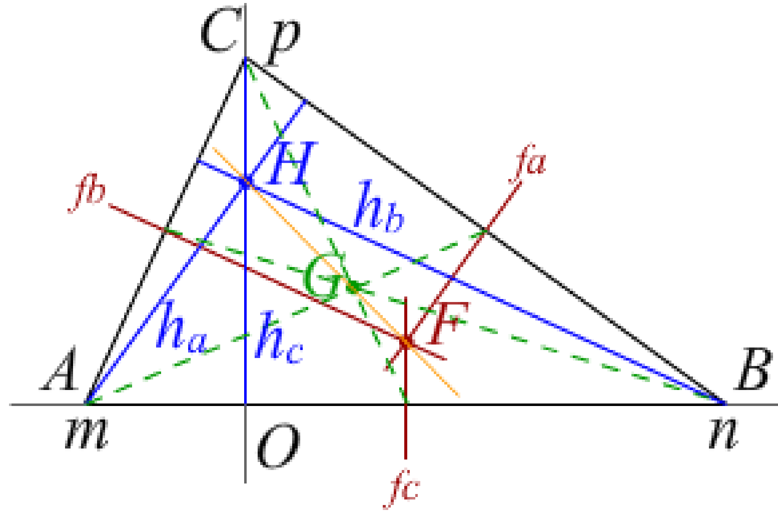
Тежиште, ортоцентар и центар описаног круга троугла леже на једној правој која се назива Ојлерова права[9]. То ћемо сада доказати узгред тестирајући претходне резултате на једном општом примеру.

Пример 3.5.3. *Дат је троугао $A(m,0), B(n,0), C(0,p)$. Показати да су тежиште G, ортоцентар H и центар описаног круга F троугла дати са:*

$$G\left(\frac{m+n}{3}, \frac{p}{3}\right), \; H\left(0, -\frac{mn}{p}\right), \; F\left(\frac{m+n}{2}, \frac{mn+p^2}{2p}\right) \tag{3.65}$$

и да те три тачке леже на једној правој, као што се види на слици 3.11.

[9]Euler line: `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_line`



Slika 3.11: Triangle $A(m,0), B(n,0), C(0,p)$.

Решење. Из релација (3.53), тежиште G је очигледно тачно. Из (3.62) налазимо детерминанту система:

$$D(H) = D(F) = \begin{vmatrix} m & n & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = p(n-m), \tag{3.66}$$

која је заједничка ортоцентру H и центру описаног круга F. Детерминанте које дефинишу бројнике координата ортоцентра H су:

$$D_x(H) = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & mn \\ 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_y(H) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & mn \\ m & n & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = mn(m-n).$$

Коначно, одговарајуће детерминанте центра F круга су:

$$D_x(F) = +\frac{1}{2}\begin{vmatrix} m^2 & n^2 & p^2 \\ 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{p}{2}(m^2-n^2),$$

$$D_y(F) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} m^2 & n^2 & p^2 \\ m & n & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{m}{2}(n^2-p^2) - \frac{n}{2}(p^2-m^2).$$

Количници $\frac{D_x}{D}$ и $\frac{D_y}{D}$ посебно за H и F показују да је (3.65) тачно.

Да би доказали колинеарност (да леже на истој правој) тачака G, H, F потражимо површину троугла ΔGHF. Ако је површина нула, тада су поменуте тачке колинеарне. Израчунавамо редом:

$$2\Pi(GHF) = \begin{vmatrix} \frac{m+n}{3} & 0 & \frac{m+n}{2} \\ \frac{p}{3} & -\frac{mn}{p} & \frac{mn+p^2}{2p} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{m+n}{6}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ \frac{p}{3} & -\frac{mn}{p} & \frac{mn+p^2}{2p} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{m+n}{6}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{p}{3} & -\frac{mn}{p} & \frac{mn+p^2}{2p} - \frac{p}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{m+n}{3}\begin{vmatrix} -\frac{mn}{p} & \frac{mn+p^2}{2p} - \frac{p}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m+n}{6}\left(\frac{mn}{2p} - \frac{mn+p^2}{2p} + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

То значи да су тежиште, ортоцентар и центаро описаног круга троугла три колинеарне тачке. □

Приметимо да се било који троугао ротацијом и транслацијом координатног система може поставити у позицију као на слици 3.11, за неке реалне бројеве m, n, p. Посебно, то значи да су тежиште G, ортоцентар H и центар описаног круга F три колинеарне тачке сваког троугла. У геометрији је добро познато да права која их садржи (Ојлерова права) пролази још неким значајним тачкама троугла.

Нема потребе да овде ширимо разматрања на остале важне тачке троугла, којих има више хиљада, већ само да укажемо на моћ приказаних али данас непопуларних метода алгебре у геометрији. За допуну, покажимо да тачке H, G и F троугла ABC не само да су колинеарне, већ да за њих важи и пропорција

$$d(H,G) : d(G,F) = 2 : 1. \tag{3.67}$$

Другим речима, $|HG| : |GF| = 2 : 1$. Ојлерова права на којој леже H, G and F је представљена жутом линијом на слици 3.11.

Доказ поменуте пропорције се може извести како помоћу реалних Декартових координата, тако и помоћу комплексне равни. Прво, дефинишемо комплексне бројеве H, G and F чији су реални делови прве координате (3.65), а имагинарни друге. Затим, приметимо да је $\overline{HG} = 2\overline{GF}$, а то је (3.67).

Обрнуто, знајући да су тачке H, G и F колинеарне и да важи пропорција (3.67), тада можемо наћи координате тачке F или рецимо доказати да је та тачка једнако удаљена од темена троугла на следећи начин.

Прво, приметимо да је

$$F = H + \frac{3}{2}(G - H) = \frac{1}{2}(A + B + C - H). \tag{3.68}$$

Затим, формирамо комплексне бројеве:

$$\begin{cases} R_A = F - A = \frac{1}{2}(-A + B + C - H) \\ R_B = F - B = \frac{1}{2}(A - B + C - H) \\ R_C = F - C = \frac{1}{2}(A + B - C - H), \end{cases} \tag{3.69}$$

који представљају удаљености тачке F од темена A, B и C датог торугла. Једнакост модула ових комплексних бројева је могуће доказати и помоћу општих координата и теореме 3.5.1, али је то много лакше помоћу (3.65) и слике 3.11.

Остављам то читаоцу за самосталан рад, јер се у наставку бавимо сличним методама и мало тежим задацима.

3.6 Кругови троугла

Потсетимо се комутатора и теореме 3.2.5, да бисмо дефинисали и пројекције као додатна математичка помагала. Оријентисане *пројекције* дужи $p = MN$ на координатне осе су дужине $p_x = M_x - N_x$ и $p_y = M_y - N_y$. Даље следимо један мој текст[10] недавно објављен.

Комутатор дужи p, q је број $[p, q] = p_x q_y - q_x p_y$. То је у складу са дефиницијом комутатора тачака, заједно са којом можемо доказати још неколико општих ставова. Први је тривијалан, став сличнан (3.24) за комутатор тачака..

Теорема 3.6.1. *Збир комутатора дужи кружно редом узетих дуж темена затвореног многоугла једнак је површини многоугла. Та површина је позитивна (негативна) ако идемо у позитивном (негативном) смеру.*

Теорема 3.6.2. *Дијагонале четвороугла $ABCD$ су $p = AC$ и $q = BD$, његова површина је $\Pi(ABCD) = [p, q]$.*

Доказ. $[p, q] = p_x q_y - q_x p_y = (A_x - C_x)(B_y - D_y) - (B_x - D_x)(A_y - C_y) =$

$$= (A_x B_y - A_x D_y - C_x B_y + C_x D_y) - (B_x A_y - B_x C_y - D_x A_y + D_x C_y)$$

$$= (A_x B_y - B_x A_y) + (B_x C_y - C_x B_y) + (C_x D_y - D_x C_y) + (D_x A_y - A_x D_y)$$

$$= [A, B] + [B, C] + [C, D] + [D, A] = \Pi(ABCD).$$

За последњи корак користимо (3.24). □

Теорема 3.6.3. *За странице $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ троугла ΔABC важи:*

$$a_x + b_x + c_x = 0, \quad a_y + b_y + c_y = 0, \tag{3.70}$$

$$[a, b] = [b, c] = [c, a] = 2\Pi(ABC). \tag{3.71}$$

Доказ. Прве једнакости следе из ($\xi \in \{x, y\}$):

$$a_\xi + b_\xi + c_\xi = (B_\xi - C_\xi) + (C_\xi - A_\xi) + (A_\xi - B_\xi) = 0.$$

Друге следе из: $[a, b] = a_x b_y - b_x a_y =$

$$= (B_x - C_x)(C_y - A_y) - (C_x - A_x)(B_y - C_y)$$

$$= [A, B] + [B, C] + [C, A] = 2\Pi(ABC).$$

Цикличном заменом слова добијамо остатак тврђења. □

Следе два примера као увод у наставак текста.

[10] Rastko Vukovic: *Coordinates of inscribed circles in a triangle*, May 2014

Линеарна једначина. Ако је $P(x,y)$ произвољна тачка на правој AB биће $[A,P]+[P,B]=[A,B]$ и важиће теорема 3.6.3 због:

$$(A_x y - xA_y) + (xB_y - B_x y) = [A,B],$$

$$-(A_y - B_y)x + (A_x - B_x)y = [A,B],$$

$$c_y x - c_x y = [B,A],$$

Ово је општи, или стандардни облик *линеарне једначине*. Може се писати као:

$$c_y x - c_x y + [A,B] = 0. \tag{3.72}$$

Растојање. Као што знамо *растојање* између праве $c = AB$ дато једначином (3.52) и тачке $P(x,y)$ је:

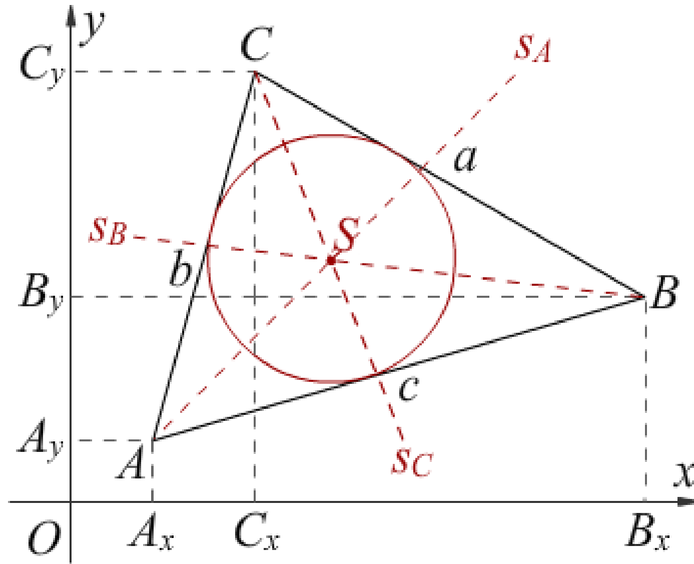
$$d(c,P) = \left|\frac{c_y x - c_x y + [A,B]}{c}\right|, \quad c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}. \tag{3.73}$$

Због једноставности, истим словом c означавамо и дужину и праву.

3.6.1 Симетрале

Симетрала угла је права које *раздваја* угао на две (једнаке) половине.

Као што знамо, две праве које се секу имају узајамно окомите симетрале углова. Симетралу унутрашњег угла A троугла ΔABC означимо са s_A, као што је приказано на слици 3.12. Тачку пресека симетрала означимо са S. Доследно, симетрале ваньских углова означавамо са s'_A.



Slika 3.12: Labeling the bisectors of the triangle.

Нека је дат троугао ΔABC (не нулте површине), са страницама:

$$\begin{cases} a: & a_y x - a_x y + [B,C] = 0, \\ b: & b_y x - b_x y + [C,A] = 0, \\ c: & c_y x - c_x y + [A,B] = 0. \end{cases} \tag{3.74}$$

Геометријско место тачака $S_A(x,y)$ једнако удаљених од страница b,c задовољава једначину $d(b,S_A) = d(c,S_A)$:

$$\left|\frac{b_y x - b_x y + [C,A]}{b}\right| = \left|\frac{c_y x - c_x y + [A,B]}{c}\right|. \tag{3.75}$$

Једначине (3.54) и (3.55) су последица (3.52) и (3.53). Отуда једначине симетрала угла троугла:

$$\begin{cases} s_A: & \frac{b_y x - b_x y + [C,A]}{b} \pm \frac{c_y x - c_x y + [A,B]}{c} = 0, \\ s_B: & \frac{c_y x - c_x y + [A,B]}{c} \pm \frac{a_y x - a_x y + [B,C]}{a} = 0, \\ s_C: & \frac{a_y x - a_x y + [B,C]}{a} \pm \frac{b_y x - b_x y + [C,A]}{c} = 0, \end{cases} \tag{3.76}$$

где су a,b,c дужине страница (истог имена).

Знак „±“ између разломака је „минус“ за симетралу унутрашњег угла троугла, а „плус“ за симетралу ваљског. Погледајмо један пример који ће појаснити ове предзнаке.

Уписани круг. Дат је троугао $A(1,1), B(4,2), C(3,5)$. Наћи центар S уписаног круга.

Израчунавамо $a_x = B_x - C_x,\ a_y = B_y - C_y,\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},\ \dots$ и налазимо:

$$\begin{matrix} a_x = 1 & a_y = -3 & a = \sqrt{10} & [B,C] = 14 \\ b_x = 2 & b_y = 4 & b = \sqrt{20} & [C,A] = -2 \\ c_x = -3 & c_y = -1 & c = \sqrt{10} & [A,B] = -2 \end{matrix} \tag{3.77}$$

Тиме формирамо једначине страница:

$$\begin{cases} a: & -3x - y + 14 = 0, \\ b: & 4x - 2y - 2 = 0, \\ c: & -x + 3y - 2 = 0. \end{cases} \tag{3.78}$$

Затим налазимо једначине симетрала (3.56):

$$\begin{cases} s_A: & \frac{4x-2y-2}{\sqrt{20}} \pm \frac{-x+3y-2}{\sqrt{10}} = 0, \\ s_B: & \frac{-x+3y-2}{\sqrt{10}} \pm \frac{-3x-y+14}{\sqrt{10}} = 0, \\ s_C: & \frac{-3x-y+14}{\sqrt{10}} \pm \frac{4x-2y-2}{\sqrt{20}} = 0. \end{cases} \tag{3.79}$$

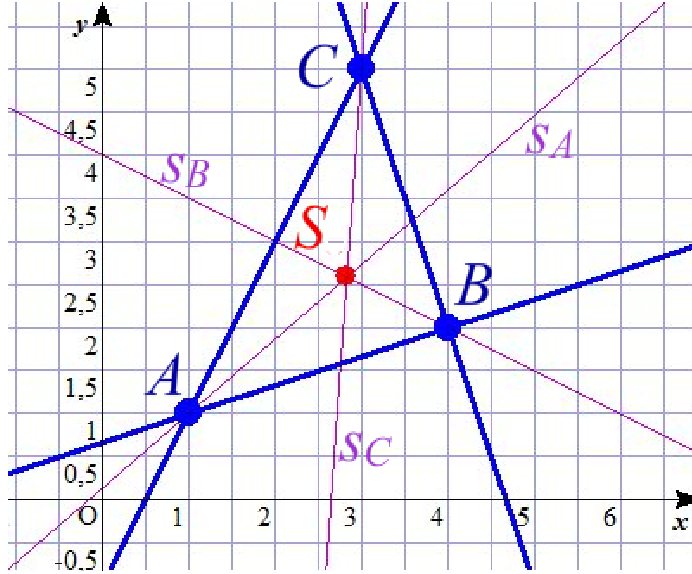
Уместо „±“ ставимо „−“ у све три једначине. Након множења са $\sqrt{10}$ и груписања варијабли, добијамо систем унутрашњих симетрала:

$$\begin{cases} s_A: & (2\sqrt{2}+1)x - (\sqrt{2}+3)y - \sqrt{2} + 2 = 0, \\ s_B: & 2x + 4y - 16 = 0, \\ s_C: & (-3-2\sqrt{2})x - (1-\sqrt{2})y + 14 + \sqrt{2} = 0. \end{cases} \tag{3.80}$$

Ради контроле, саберимо све три једначине. Резултат је идентитет $0 = 0$. То значи да су једначине линеарно зависне и да постоји јединствена тачка $S(S_x, S_y) \in s_A \cap s_B \cap s_C$. Бирајмо било коју од те три једначине и решимо је:

$$S_x = \frac{4+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \quad S_y = \frac{2+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}. \tag{3.81}$$

Приближно $S_x = 2,82843$ и $S_y = 2,58579$. Резултат је приказан на слици 3.13.



Slika 3.13: Унутрашње симетрале (3.76), минус уместо плус-минус.

3.6.2 Опције

Сада ћемо истражити опције бирања знакова у (3.76). Раздвајамо варијабле и добијамо систем:

$$\begin{cases} s_A: & \left(\frac{b_y}{b} \pm \frac{c_y}{c}\right)x - \left(\frac{b_x}{b} \pm \frac{c_x}{c}\right)y + \left(\frac{[C,A]}{b} \pm \frac{[A,B]}{c}\right) = 0, \\ s_B: & \left(\frac{c_y}{c} \pm \frac{a_y}{a}\right)x - \left(\frac{c_x}{c} \pm \frac{a_x}{a}\right)y + \left(\frac{[A,B]}{c} \pm \frac{[B,C]}{a}\right) = 0, \\ s_C: & \left(\frac{a_y}{a} \pm \frac{b_y}{b}\right)x - \left(\frac{a_x}{a} \pm \frac{b_x}{b}\right)y + \left(\frac{[B,C]}{a} \pm \frac{[C,A]}{b}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.82}$$

где $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$, $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$. Знаци „±“ су исти у истој једначини, али не у другима. Међутим, није свака могућа комбинација знакова дозвољена.

На пример, ако све три једначине (3.76) или (3.82) уместо „±“ имају „минус“, добијамо *сагласан* систем. Наиме, збир све три даје идентитет 0 = 0, што значи да три праве имају заједничку тачку. Сада погледајмо друге опције.

Означимо знаке ± у првој, другој и трећој једначини (3.82) редом са $\pm_1, \pm_2, \pm_3$ и множимо их произвољним $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Добијамо:

$$\begin{cases} x: & \frac{b_y}{b}(\alpha \pm_1 \gamma) + \frac{c_y}{c}(\beta \pm_2 \alpha) + \frac{a_y}{a}(\gamma \pm_3 \beta) = 0, \\ y: & \frac{b_x}{b}(\alpha \pm_1 \gamma) + \frac{c_x}{c}(\beta \pm_2 \alpha) + \frac{a_x}{a}(\gamma \pm_3 \beta) = 0, \\ z: & \frac{[C,A]}{b}(\alpha \pm_1 \gamma) + \frac{[A,B]}{c}(\beta \pm_2 \alpha) + \frac{[B,C]}{a}(\gamma \pm_3 \beta) = 0. \end{cases} \tag{3.83}$$

То је нови хомогени систем линеарних једначина по варијаблама:

$$\xi_1 = \alpha \pm_1 \gamma, \quad \xi_2 = \beta \pm_2 \alpha, \quad \xi_3 = \gamma \pm_3 \beta.$$

Тривијално решење тог система је $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Да би имали хомогени систем са другим решењима, детерминанта система мора бити нула. Међутим, детерминанта система је:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{b_y}{b} & \frac{c_y}{c} & \frac{a_y}{a} \\ \frac{b_x}{b} & \frac{c_x}{c} & \frac{a_x}{a} \\ \frac{[C,A]}{b} & \frac{[A,B]}{c} & \frac{[B,C]}{a} \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} b_y & c_y & a_y \\ b_x & c_x & a_x \\ [C,A] & [A,B] & [B,C] \end{vmatrix} =$$

$$= abc\left((a_x c_y - c_x a_y)[C,A] + (b_x a_y - a_x b_y)[A,B] + (c_x b_y - b_x c_y)[B,C]\right)$$
$$= abc\left(2\mu[C,A] + 2\mu[A,B] + 2\mu[B,C]\right)$$
$$= abc(2\Pi)\left([C,A] + [A,B] + [B,C]\right) = abc(2\Pi)^2,$$

где је $\Pi = \Pi(ABC)$ површина троугла ΔABC. Према томе, детерминанта система (3.83) је:

$$D = 2abc\Pi^2 \neq 0,$$

што значи да систем нема других решења осим тривијалних:

$$\alpha \pm_1 \gamma = 0, \quad \beta \pm_2 \alpha = 0, \quad \gamma \pm_3 \beta = 0. \tag{3.84}$$

Већ смо видели да бирајући $-,-,-$ на местима $\pm_1, \pm_2, \pm_3$ систем даје три конкурентне праве (које имају једну заједничку тачку), са пресеком симетрала унутрашњих углова у заједничкој тачки S која је центар уписаног круга.

Друга опција је избор $+,+,-$. Тада имамо $\alpha = -\gamma$, $\beta = -\alpha = +\gamma$ и $\beta = \gamma$, што је могуће за свако γ.

Међутим, избор знакова $+,-,-$ води у контрадикцију. Наиме, ако постоје $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ такви да $\alpha + \gamma = 0$, $\beta - \alpha = 0$, $\gamma - \beta = 0$, тада мора бити $\alpha = -\beta$, $\beta = \alpha = -\gamma$, $\beta = \gamma$. Али последње две једнакости дају $-\gamma = \gamma$, тј. $\gamma = 0$ што је контрадикција са претпоставком $\gamma \neq 0$.

Избор $+,+,+$ такође води у контрадикцију. Наиме, из $\alpha + \gamma = 0$, $\beta + \alpha = 0$, $\gamma + \beta = 0$ следи $\alpha = -\gamma$, $\beta = -\alpha = +\gamma$, $\beta = -\gamma$, и опет $\gamma = 0$, што је контрадикција.

Како друге варијације ових знакова не постоје, то имамо само четири могућности: $-,-,-$, $+,+,-$, $+,-,+$, $-,+,+$. Тиме смо доказали следећи став.

Теорема 3.6.4. *Систем једначина (3.62) дефинише конкурентне праве линије само у случајевима када на местима „±“ стоје све три минуса, или један минус и два плуса.*

У литератури стоји погрешно, да знак ± симетрала углова у једначинама (3.82) зависи од тога да ли је исходиште координатног система унутар угла. Ради провере тога, погледајмо још један пример.

Приписани круг. Дат је троугао $A(1,2), B(3,-2), C(5,3)$. Наћи центар S_c' вани приписаног круга на страницу c.

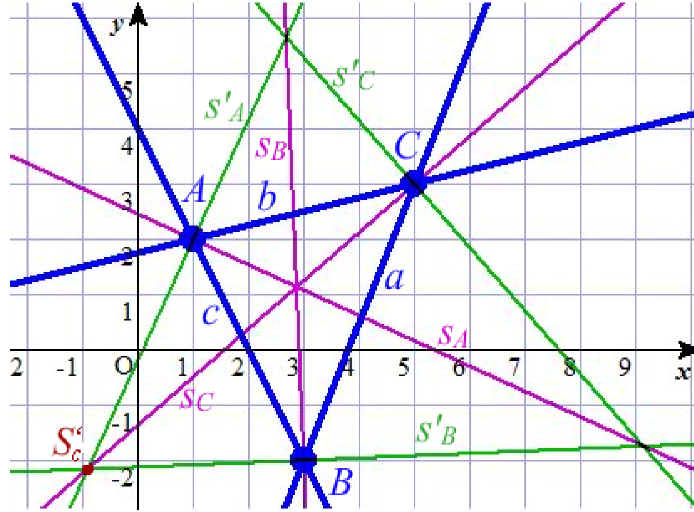
Лако је наћи странице и комутаторе:

$$\begin{array}{cccc} a_x = -2 & a_y = -5 & a = \sqrt{29} & [B,C] = 19 \\ b_x = 4 & b_y = 1 & b = \sqrt{17} & [C,A] = 7 \\ c_x = -2 & c_y = 4 & c = \sqrt{20} & [A,B] = -8 \end{array}$$

Збир константних чланова, $[B,C] + [C,A] + [A,B] = 18$, је двострука површина троугла. Затим лако налазимо странице и симетрале. Међу осталим комбинацијама знакова „±“ постоје само четири које дају по три конкурентне праве, као што се види на слици 3.14.

Нађимо центар приписаног круга S_c'. Симетрале ваньских углова A и B су:

$$\begin{cases} s_A': & \left(\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{20}}\right)x - \left(\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{-2}{\sqrt{20}}\right)y = \left(\frac{-7}{\sqrt{17}} + \frac{8}{\sqrt{20}}\right), \\ s_B': & \left(\frac{4}{\sqrt{20}} + \frac{-5}{\sqrt{29}}\right)x - \left(\frac{-2}{\sqrt{20}} + \frac{-2}{\sqrt{29}}\right)y = \left(\frac{8}{\sqrt{20}} + \frac{-19}{\sqrt{29}}\right), \end{cases} \tag{3.85}$$



Slika 3.14: Bisectors of the triangle ΔABC.

Детерминанте овог система су, приближно:

$$D = 0,912917, \quad D_x = -0,834981, \quad D_y = -1,97448.$$

Решење је тачка $S_c'(x_c', y_c')$, центар вани приписаног круга на страницу $c = AB$ троугла. Координате центра су:

$$x_c' = \frac{D_x}{D} = -0,91463 \quad y_c' = \frac{D_y}{D} = -2,16283. \tag{3.86}$$

3.6.3 Кординате

Овде ћемо видети само две теореме за израчунавање координата једног уписаног и три приписана круга.

Теорема 3.6.5. *Када у систему (3.82) уместо „±“ стоје три „минуса“, решење је:*

$$x = \frac{A_x a + B_x b + C_x c}{a+b+c}, \quad y = \frac{A_y a + B_y b + C_y c}{a+b+c}. \tag{3.87}$$

Доказ. Из (3.76) следи (3.82) па:

$$\begin{cases} s_A: & \left(\frac{b_y}{b} - \frac{c_y}{c}\right)x - \left(\frac{b_x}{b} - \frac{c_x}{c}\right)y = \frac{[A,C]}{b} - \frac{[B,A]}{c}, \\ s_B: & \left(\frac{c_y}{c} - \frac{a_y}{a}\right)x - \left(\frac{c_x}{c} - \frac{a_x}{a}\right)y = \frac{[B,A]}{c} - \frac{[C,B]}{a}, \\ s_C: & \left(\frac{a_y}{a} - \frac{b_y}{b}\right)x - \left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right)y = \frac{[C,B]}{a} - \frac{[A,C]}{b}. \end{cases} \tag{3.88}$$

Било које две од тих једначина даће решење, тачку $S(x,y)$ која је центар уписаног круга троугла. На пример, $S \in s_A \cap s_B$, то је систем прве две једначине. Детерминанта тог система је:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{b_y}{b} - \frac{c_y}{c} & \frac{c_x}{c} - \frac{b_x}{b} \\ \frac{c_y}{c} - \frac{a_y}{a} & \frac{a_x}{a} - \frac{c_x}{c} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{b_y a_x}{ba} - \frac{b_y c_x}{bc} - \frac{c_y a_x}{ca} + \frac{c_y c_x}{c^2}\right) - \left(\frac{c_y c_x}{c^2} - \frac{c_y b_x}{cb} - \frac{a_y c_x}{ac} + \frac{a_y b_x}{ab}\right)$$

$$= \frac{b_y a_x - a_y b_x}{ab} + \frac{c_y b_x - b_y c_x}{bc} + \frac{a_y c_x - c_y a_x}{ca}.$$

Због $[a,b] = [b,c] = [c,a] = 2\Pi$ је сваки бројник двоструко већи од површине датог троугла. Отуда:

$$D = 2\Pi\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{2\Pi}{abc}(a+b+c). \tag{3.89}$$

То је детерминанта произвољне две од три једначине (3.88).

Детерминанте варијабле x у прве две једначине система (3.88) су, редом:

$$D_x = \begin{vmatrix} \frac{[A,C]}{b} - \frac{[B,A]}{c} & \frac{c_x}{c} - \frac{b_x}{b} \\ \frac{[B,A]}{c} - \frac{[C,B]}{a} & \frac{a_x}{a} - \frac{c_x}{c} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{[A,C]a_x}{ba} - \frac{[A,C]c_x}{bc} - \frac{[B,A]a_x}{ca} + \frac{[B,A]c_x}{c^2}\right)$$

$$-\left(\frac{[B,A]c_x}{c^2} - \frac{[B,A]b_x}{cb} - \frac{[C,B]c_x}{ac} + \frac{[C,B]b_x}{ab}\right)$$

$$= \frac{[A,C]a_x - [C,B]b_x}{ab} + \frac{[B,A]b_x - [A,C]c_x}{bc} + \frac{[C,B]c_x - [B,A]a_x}{ca}$$

$$= \frac{C_x \cdot (2\Pi)}{ab} + \frac{A_x \cdot (2\Pi)}{bc} + \frac{B_x \cdot (2\Pi)}{ca}.$$

Наиме, слично (3.89), бројник је $[A,C]a_x - [C,B]b_x = C_x \cdot (2\Pi)$. Цикличном заменом слова добијамо остале бројнике. Према томе, детерминанта варијабле x је:

$$D_x = 2\Pi\left(\frac{C_x}{ab} + \frac{A_x}{bc} + \frac{B_x}{ca}\right) = \frac{2\Pi}{abc}(A_x a + B_x b + C_x c). \tag{3.90}$$

Детерминанта варијабле y две од тих једначина је:

$$D_y = 2\mu\left(\frac{C_y}{ab} + \frac{A_y}{bc} + \frac{B_y}{ca}\right) = \frac{2\mu}{abc}(A_y a + B_y b + C_y c). \tag{3.91}$$

Према томе, једначине (3.88) представљају праве линије које се секу у једној тачки $S(x,y)$ која је центар уписаног круга датог троугла. Координате тог центра су $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$, тј.

$$\begin{cases} x: & \left(\frac{A_x}{bc} + \frac{B_x}{ca} + \frac{C_x}{ab}\right) / \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right) = \frac{A_x a + B_x b + C_x c}{a+b+c}, \\ y: & \left(\frac{A_y}{bc} + \frac{B_y}{ca} + \frac{C_y}{ab}\right) / \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right) = \frac{A_y a + B_y b + C_y c}{a+b+c}. \end{cases} \tag{3.92}$$

Са овим је теорема доказана. □

У примеру уписане кружнице последње формуле дају:

$$x = \frac{1 \cdot \sqrt{10} + 4 \cdot \sqrt{20} + 3 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{10}} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}},$$

$$y = \frac{1 \cdot \sqrt{10} + 2\sqrt{20} + 5\sqrt{10}}{\sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{10}} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

То је резултат једнак са (3.81).

Теорема 3.6.6. *Када у систему (3.76) уместо ± стоји* $+,+,-$ *редом, решење је:*

$$x'_c = \frac{A_x a + B_x b - C_x c}{a+b-c}, \quad y'_c = \frac{A_y a + B_y b - C_y c}{a+b-c}. \tag{3.93}$$

Dokaz. Из (3.76) следи (3.82) и сада:

$$\begin{cases} s'_A: & \left(\frac{b_y}{b}+\frac{c_y}{c}\right)x - \left(\frac{b_x}{b}+\frac{c_x}{c}\right)y = \frac{[A,C]}{b}+\frac{[B,A]}{c}, \\ s'_B: & \left(\frac{c_y}{c}+\frac{a_y}{a}\right)x - \left(\frac{c_x}{c}+\frac{a_x}{a}\right)y = \frac{[B,A]}{c}+\frac{[C,B]}{a}, \\ s_C: & \left(\frac{a_y}{a}-\frac{b_y}{b}\right)x - \left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)y = \frac{[C,B]}{a}-\frac{[A,C]}{b}. \end{cases} \tag{3.94}$$

Према теореми 3.6.4, било које две једначине (3.94) даће исто решење, тачку $S'_c(x'_c, y'_c)$, центар приписане кружнице на страницу c троугла ΔABC.

На пример, $S'_c \in s'_A \cap s'_B$, а то је тачка S'_c на обе симетрале вањских углова A и B. Решавамо прве две од те три једначине. Детерминанте тог система су:

$$D = \frac{2\Pi}{abc}(a+b-c), \tag{3.95}$$

$$D_x = \frac{2\Pi}{abc}(A_x a + B_x b - C_x c), \tag{3.96}$$

$$D_y = \frac{2\Pi}{abc}(A_x a + B_x b - C_x c). \tag{3.97}$$

Доказ је сличан претходнима. Проверимо D_y.

$$D_y = \begin{vmatrix} \frac{b_y}{b}+\frac{c_y}{c} & \frac{[A,C]}{b}+\frac{[B,A]}{c} \\ \frac{c_y}{c}+\frac{a_y}{a} & \frac{[B,A]}{c}+\frac{[C,B]}{a} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{b_y[B,A]}{bc}+\frac{b_y[C,B]}{ba}+\frac{c_y[B,A]}{c^2}+\frac{c_y[C,B]}{ca}\right)$$

$$-\left(\frac{c_y[A,C]}{cb}+\frac{c_y[B,A]}{c^2}+\frac{a_y[A,C]}{ab}+\frac{a_y[B,A]}{ac}\right)$$

$$= -\frac{a_y[A,C]-b_y[C,B]}{ab}+\frac{b_y[B,A]-c_y[A,C]}{bc}+\frac{c_y[C,B]-a_y[B,A]}{ca}$$

$$= -\frac{C_y\cdot(2\mu)}{ab}+\frac{A_y\cdot(2\mu)}{bc}+\frac{B_y\cdot(2\mu)}{ca}.$$

Опет због $a_y[C,A]-b_y[B,C]=2\Pi$ имамо $D_y = 2\mu\left(-\frac{C_y}{ab}+\frac{A_y}{bc}+\frac{B_y}{ca}\right)$ и затим (3.97).

Према томе, решење датог система је $x'_c = \frac{D_x}{D}$, $y'_c = \frac{D_y}{D}$, са:

$$x'_c = \frac{A_x a + B_x b - C_x c}{a+b-c}, \quad y'_c = \frac{A_y a + B_y b - C_y c}{a+b-c}. \tag{3.98}$$

Тиме је теорема доказана. □

У примеру приписаног круга, за троугао $A(1,2), B(3,-2), C(5,3)$ сада имамо:

$$x'_c = \frac{1\cdot\sqrt{29}+3\cdot\sqrt{17}-5\cdot\sqrt{20}}{\sqrt{29}+\sqrt{17}-\sqrt{20}} = -0,91463$$

$$y'_c = \frac{2\cdot\sqrt{29}+(-2)\cdot\sqrt{17}-5\cdot\sqrt{20}}{\sqrt{29}+\sqrt{17}-\sqrt{20}} = -2,16283.$$

То је исти резултат као (3.86).

3.6.4 Полупречници

Растојање (3.73) од центра уписаног круга S до странице c износи:

$$r = \left|\frac{c_y x_u - c_x y_u + [A,B]}{c}\right|.$$

Користећи координате (3.87) налазимо: $r = \frac{1}{c(a+b+c)}|(A_y - B_y)(A_x a + B_x b + C_x c) - (A_x - B_x)(A_y a + B_y b + C_y c) + (A_x B_y - B_x A_y)(a+b+c)| =$

$$= \frac{|A_x(B_y - C_y) + B_x(C_y - A_y) + C_x(Ay - B_y)|}{a+b+c} = \frac{2\Pi}{a+b+c}.$$

Отуда полупречник уписаног круга:

$$r = \frac{2\Pi}{a+b+c}. \tag{3.99}$$

Слично, удаљеност од вањског центра S_c' до странице c износи:

$$r_c' = \left|\frac{c_y x_c' - c_x y_u' c + [A,B]}{c}\right|.$$

Користећи (3.97) налазимо: $r_c' = \frac{1}{c(a+b-c)}|(A_y - B_y)(A_x a + B_x b - C_x c) - (A_x - B_x)(A_y a + B_y b - C_y c) + (A_x B_y - B_x A_y)(a+b-c)| =$

$$= \frac{|-A_x(B_y - C_y) - B_x(C_y - A_y) - C_x(Ay - B_y)|}{a+b-c} = \frac{2\Pi}{a+b-c}.$$

Због симетрије, полупречници три приписана круга су:

$$r_a' = \frac{2\Pi}{-a+b+c}, \quad r_b' = \frac{2\Pi}{a-b+c}, \quad r_c' = \frac{2\Pi}{a+b-c}. \tag{3.100}$$

Следећи пример је потврда резултата (3.99) и формуле

$$r \le \rho_a + \rho_b + \rho_c < \min(a,b,c), \tag{3.101}$$

где су ρ_a, ρ_b, ρ_c полупречници кругова уписаних у троугао $\Delta PBC, \Delta PCA, \Delta PAB$, са тачком P унутар троугла ΔABC, објашњени и доказани у прилогу [11].

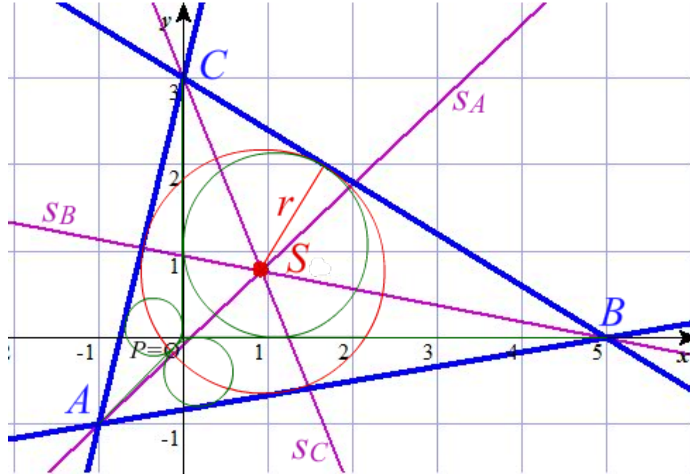
Унутрашњи кругови. Темена троугла су $A(-1,-1), B(5,0), C(0,3)$. Унутар троугла је подељена на три троугла $\Delta OBC, \Delta OCA, \Delta OAB$. Наћи и проверити симетрале и формулу (3.101), где је $P = O$.

Једначине страница су:

$$\begin{cases} a: & -3x - 5y + 15 = 0, \\ b: & 4x - y + 3 = 0, \\ c: & -x + 6y + 5 = 0. \end{cases}$$

Двострука површина троугла је $15 + 3 + 5 = 23$. Симетрале унутрашњих углова:

$$\begin{cases} s_A: & \frac{4x-y+3}{\sqrt{17}} - \frac{-x+6y+5}{\sqrt{37}} = 0, \\ s_B: & \frac{-x+6y+5}{\sqrt{37}} - \frac{-3x-5y+15}{\sqrt{34}} = 0, \\ s_C: & \frac{-3x-5y+15}{\sqrt{34}} - \frac{4x-y+3}{\sqrt{17}} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_A: & y = 0,92x - 0,08, \\ s_B: & y = -0,19x + 0,95, \\ s_C: & y = -2.41x + 3. \end{cases} \tag{3.102}$$



Slika 3.15: Incircle of the triangle with the origin within.

Резултати (3.102) се могу видети на слици 3.15.

Полупречник (3.99) уписаног круга је:

$$r = \frac{23}{\sqrt{34}+\sqrt{17}+\sqrt{37}} = 1.4342.$$

Површине унутрашњих троуглова су:

$$\begin{cases} \Pi(OBC): & [O,B]+[B,C]+[C,O] = 15, \\ \Pi(OCA): & [O,C]+[C,A]+[A,O] = 3, \\ \Pi(OAB): & [O,A]+[A,B]+[B,O] = 5. \end{cases}$$

Странице ($q' = OQ$) унутрашњих троуглова:

$$\begin{cases} \Delta OBC: & a = \sqrt{34},\ b' = 5,\ c' = 3, \\ \Delta OCA: & a' = \sqrt{2},\ b = \sqrt{17},\ c' = 3, \\ \Delta OAB: & a' = \sqrt{2},\ b' = 5,\ c' = 3. \end{cases}$$

Отуда, једначина (3.01) постаје

$$1.4342 \le \frac{15}{\sqrt{34}+8} + \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{17}+3} + \frac{5}{\sqrt{2}+8} < \sqrt{17},$$

$$1.4342 \le 1.96703 < 4.12311.$$

А те неједнакости су тачне.

Ако нас може изненадити дубина и прецизност закона геометрије, онда нас поготово може затећи откриће да „простори“ новооткривених димензија времена крију исте правилности. Време настаје реализацијом наводно објективне неизвесности, како је то претпостављено на почетку ове књиге. Закони одржања (конзервације) неизвесности и информације чине нашу прошлост стабилном. Међутим, они указују и на много веће сличности „онostраног“ неизвесног и „овостраног“ реализованог.

3.7 Псеудо раван

Префикс псеудо (Грчки: pseudes - лажан) се користи за нешто што „изгледа као да јесте а није”. У том смислу је *псеудо раван* раван дуална комплексној равни. Рецимо, где је апсциса (x-оса) остала иста реална оса, али је ордината (y-оса) замењена имагинарном осом w, при чему је $w = iy$, $i = \sqrt{-1}$.

Дакле, координате (x, y) комплексне равни $\mathbb{C}$ пресликавамо у координате (x, w) псеудо равни једноставном сменом $w = iy$, и обрнуто $y = -iw$. Затим доследно преводимо сваку функцију из $\mathbb{C}$ у одговарајућу псеудо функцију. Површина $ab \in \mathbb{C}$ постаје iab, угао φ постаје псеудо угао $i\varphi$, итд. Користећи разво у редове (2.50), сабирањем добијамо тзв. „косинус и синус“ функцију

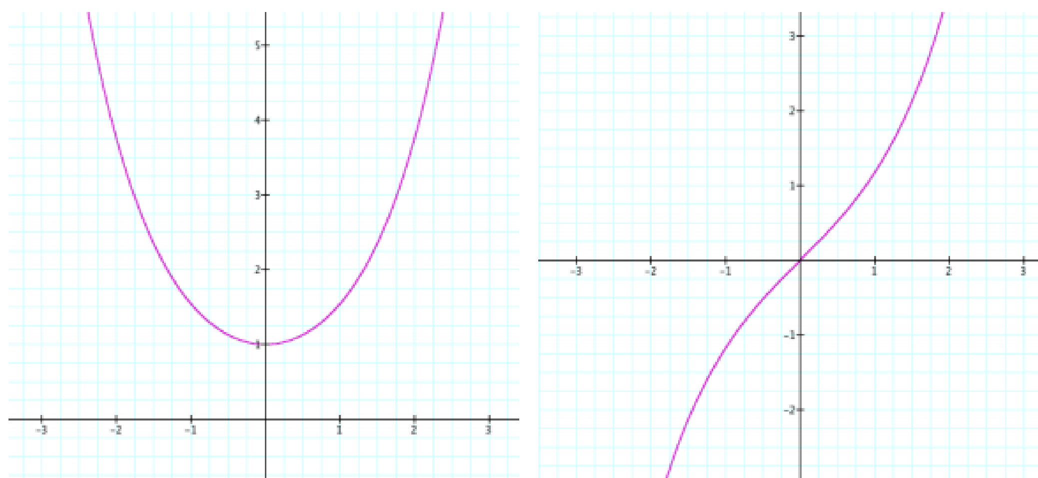
$$\text{cis}(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \tag{3.103}$$

где је $e = 2,71828\dots$ тзв. Ојлеров број, јер је развој ове експоненцијалне функције:

$$e^{\varphi} = 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \tag{3.104}$$

Претходна функција „косинус и синус” представља комплексан број јединичног модула али произвољног аргумента φ.

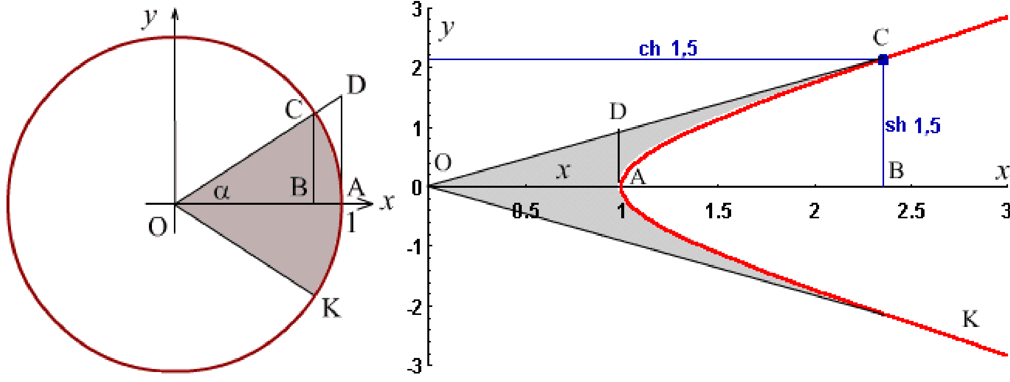
Сменом $\varphi \to i\varphi$ обичне тригонометријске функције постају хиперболне. На графовима 3.16 су приказане хиперболне функције, редом косинус и синус. Хиперболни тангенс $\text{th}(\xi) = \frac{\text{sh}(\xi)}{\text{ch}(\xi)}$ је количник хиперболног синуса и косинуса датог угла.



Slika 3.16: Хиперболни косинус и синус.

На следећој слици 3.17 лево, на тригонометријском кругу (полупречника $r = 1$) су дефинисане тригонометријске функције $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\text{tg}\,\alpha$, као одсечци BC, OB и AD, а угао $\alpha = \angle AOC$ је половина централног угла над тетивом KC.

Исти угао α у радијанима се може дефинисати и као половина површине $\Pi(KOC)$ шрафираног кружног исечка, јер централни исечак KOC има површину $\Pi = \frac{1}{2}r^2{\cdot}2\alpha = \alpha$. Аналогно, на слици десно, уместо јединичне кружнице $x^2 + y^2 = 1$ приказана је једна грана јединичне хиперболе $x^2 - y^2 = 1$ и шрафирани сектор KOC једнаке површине $\Pi = \alpha$, којом се дефинишу хиперболне функције $\text{sh}\,\alpha = BC$, $\text{ch}\,\alpha = OB$ и $\text{th}\,\alpha = AB$.



Slika 3.17: Јединична кружница и хипербола.

Свака формула „обичне” тригонометрије може се трансформисати у одговарајућу формулу хиперболне тригонометрије заменама:

$$\begin{cases} \sin z = -i \operatorname{sh} z, & \cos z = i \operatorname{ch} z, & \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} z \\ \operatorname{sh} z = -i \sin iz, & \operatorname{ch} z = i \cos iz, & \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \end{cases} \tag{3.105}$$

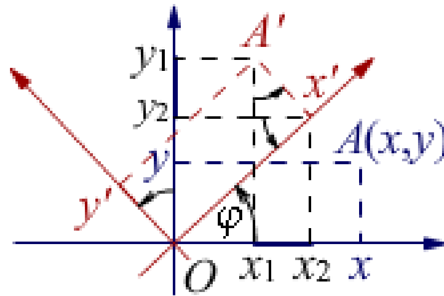
где је „угао” произвољан број $z \in \mathbb{C}$. Тако добијамо(2.51), парове идентитета:

$$\begin{cases} \cos^z + \sin^2 z = 1, & \cos^2 z = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 z), & \sin^2 z = \operatorname{tg}^2 z/(1 + \operatorname{tg}^2 z), \\ \operatorname{ch}^z - \operatorname{sh}^2 z = 1, & \operatorname{ch}^2 z = 1/(1 - \operatorname{th}^2 z), & \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{th}^2 z/(1 - \operatorname{th}^2 z), \end{cases} \tag{3.106}$$

или адиционе формуле (2.52), али и многе друге одговарајуће формуле.

За псеудо раван, као и за комплексну раван важе слични закони геометрије. То је зато што су обе позорница преламања наше неизвесности у информацију или обрнуто, место где настаје садашњост, односно реалност. Реализација случајних догађаја претвара неизвесност у информацију а производња информације ствара нашу садашњост, време и простор. Простором који тако настаје владају исти апстрактни закони, попут униварзалности ротација у геометријским симетријама.

Када координатне осе Декартовог правоуглог система Oxy комплексне равни ротирамо око исходишта O за угао ω оне постају осе система $Ox'y'$ као на слици 3.18.



Slika 3.18: Ротација око O за угао φ.

Тачка $A(x, y)$ се ротира у тачку $A'(x', y')$ са координатама:

$$x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi, \quad y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi, \tag{3.107}$$

писаним у систему Oxy. Наиме, из једнакости дужина $Ox' = Ox$, $Oy' = Oy$ и сличности правоуглих троуглова на слици 3.18 видимо:

$$x_2 = x\cos\varphi, \quad x_2 - x_1 = y\sin\varphi,$$

$$y_2 = x\sin\varphi, \quad y_1 - y_2 = y\cos\varphi,$$

$$x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

а отуда (3.107). Исто (2.44) смо добили на други начин уз слику 2.4.

Према теореми 3.1.3, ротација тачке $A(x,y)$ око исходишта за угао ω у тачку A' представља множење комплексног броја $z = x + iy$ јединичним комплексним бројем $\text{cis}(\varphi)$, дефинисаног формулом (3.103). Отуда, редом:

$$z\,\text{cis}(\varphi) = z',$$

$$(x+iy)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x' + iy',$$

$$(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + i(x\sin\varphi + y\cos\varphi) = x' + iy', \tag{3.108}$$

па упоређивањем реалих и имагинарних делова опет добијамо (3.107).

Дакле, ротација око исходишта еквивалентна је множењу јединичним комплексним бројем. Ове ротације смо већ користили (2.47) за извођење Лоренцових трансформација Ајнштајнове специјалне теорије релативности. Приметимо да теорема 2.3.1 говори опет о истим ротацијама, а она укључује и поопштава Шварцшилдову метрику опште теорије релативности. То нам даје идеју да покушамо дефинисати ротацију која би обухватила како ротације класичне координатне равни тако и псеудо равни, па и раван гравитационог поља. Користићемо методе комутатора из претходног дела текста.

Преведимо комутаторе (3.23) на поларни систем $Or\phi$, трансформацијама:

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi. \tag{3.109}$$

Декартов комутатор $[A,B]_{xy}$ постаје:

$$[A,B]_{xy} = A_x B_y - B_x A_x =$$

$$= (A_r\cos A_\phi)(B_r\sin B_\phi) - (B_r\cos B_\phi)(A_r\sin A_\phi)$$

$$= A_r B_r(\cos A_\phi \sin B_\phi - \cos B_\phi \sin A_\phi),$$

$$[A,B]_{r\phi} = A_r B_r \sin(B_\phi - A_\phi). \tag{3.110}$$

То је позната формула за површину:

$$[A,B]_{r\phi} = 2\Pi(AOB), \tag{3.111}$$

паралелограма разапетог векторима $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, односно двострука површина троугла са теменима A, O и B. Двострука површина троугла ABC је:

$$2\Pi(ABC) = [A,B]_{r\phi} + [B,C]_{r\phi} + [C,A]_{r\phi}, \tag{3.112}$$

због $\sin(B_\phi - A_\phi) = -\sin(A_\phi - B_\phi)$.

Теорема 3.7.1. *Двострука површина многоугла* $A_1A_2\dots A_n$ *је*

$$2\Pi(A_1A_2\dots A_n) = [A_1,A_2]_{r\phi} + [A_2,A_3]_{r\phi} + \dots + [A_n,A_1]_{r\phi},$$

где је $n = 3,4,\dots$.

Доказ. Размотримо затворену изломљену линију са теменима $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ у координатној равни у поларном систему са исходиштем O. Према (3.112), обилазећи те тачке додајемо површине троуглова $A_{k-1}OA_k$ са страницама $A_{k-1}A_k$ које су даље од исходишта, а одузимамо површине троуглова са таквим ближим страницама. Разлика је тражена површина. □

Размотримо сада произвољан троугао ABC након преласка из једног Декартовог система у други (неправоугли), $O\bar{x}\bar{y} \to Oxy$, трансформацијама:

$$x = \alpha_{xx}\bar{x} + \alpha_{xy}\bar{y}, \quad y = \alpha_{yx}\bar{x} + \alpha_{yy}\bar{y}, \tag{3.113}$$

односно

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \tag{3.114}$$

где су коефицијенти алфа (произвољне) константе. Да би постојала ова трансформација координата, мора детерминанта система (3.113) бити различита од нуле:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{vmatrix} = \alpha_{xx}\alpha_{yy} - \alpha_{yx}\alpha_{xy} \ne 0, \tag{3.115}$$

односно $[\alpha_x,\alpha_y] = \alpha_{xx}\alpha_{yy} - \alpha_{yx}\alpha_{xy} \ne 0$.

Посматрајмо релацију између површина датог троугла у два система координата Oxy и $O\bar{x}\bar{y}$. Израчунавамо, редом:

$$[A,B] = A_xB_y - B_xA_y =$$

$$= (\alpha_{xx}\bar{A}_x + \alpha_{xy}\bar{A}_y)(\alpha_{yx}\bar{B}_x + \alpha_{yy}\bar{B}_y) - (\alpha_{xx}\bar{B}_x + \alpha_{xy}\bar{B}_y)(\alpha_{yx}\bar{A}_x + \alpha_{yy}\bar{A}_y)$$
$$= \alpha_{xx}\alpha_{yy}(\bar{A}_x\bar{B}_y - \bar{B}_x\bar{A}_y) + \alpha_{xy}\alpha_{yx}(\bar{A}_y\bar{B}_x - \bar{A}_x\bar{B}_y)$$
$$= (\alpha_{xx}\alpha_{yy} - \alpha_{yx}\alpha_{xy})(\bar{A}_x\bar{B}_y - \bar{B}_x\bar{A}_y),$$

$$[A,B] = [\alpha_x,\alpha_y][\bar{A},\bar{B}], \tag{3.116}$$

где је $[\alpha_x,\alpha_y] = \alpha_{xx}\alpha_{yy} - \alpha_{yx}\alpha_{xy}$. Аналогно добијамо за остале комутаторе. Зато је:

$$\Pi(ABC) = [A,B] + [B,C] + [C,A] =$$

$$= [\alpha_x,\alpha_y]([\bar{A},\bar{B}] + [\bar{B},\bar{C}] + [\bar{C},\bar{A}]),$$

$$\Pi(ABC) = [\alpha_x,\alpha_y]\Pi(\bar{A}\bar{B}\bar{C}). \tag{3.117}$$

У новим координатама $O\bar{x}\bar{y}$, дефинисаним са (3.113), старе површине се множе са фактором $[\alpha_x,\alpha_y]$ који одређује да ли се простор смањује (контракција) или повећава (дилатација) својом површином. Ако је тај фактор нула, није испуњен услов (3.115) па и нема трансформације система. Ако је тај фактор један, имамо изометријску трансформацију - ротацију.

Пример 3.7.2. *Показати да произвољна површина остаје непромењена након: (i) обичне, (ii) хиперболне ротације.*

Решење. (i) Обична ротација $O\bar{x}\bar{y} \to Oxy$ за угао φ дефинисана је са:

$$x = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi, \quad y = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi, \tag{3.118}$$

па је $[\alpha_x, \alpha_y] = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, што значи да је фактор транформације један, односно да нема промене површине (било којег троугла).

(ii) Хиперболна ротација $O\bar{x}\bar{y} \to Oxy$ за угао ψ дефинисана је са:

$$x = \bar{x}\,\mathrm{ch}\,\psi + \bar{y}\,\mathrm{sh}\,\psi, \quad y = \bar{x}\,\mathrm{sh}\,\psi + \bar{y}\,\mathrm{ch}\,\psi. \tag{3.119}$$

Сада имамо $[\alpha_x, \alpha_y] = \mathrm{ch}^2\psi - \mathrm{sh}^2\psi = 1$, што значи да је фактор трансформације поново један, па опет нема промене површина. □

Ова пример показује да су обичне ротације као и Лоренцове трансформације, обе ротације и по новој дефиницији. То је било очекивано, за разлику од следећег примера који показује да и теорема 2.3.1 говори о ротацијама.

Пример 3.7.3. *Показати да су следеће инфинитезималне трансформације:*

$$\begin{cases} dr = \chi\, d\bar{r} + i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, cd\bar{t} \\ cdt = i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}\, d\bar{r} + \gamma^2\chi\, cd\bar{t}, \end{cases} \tag{3.120}$$

такође ротације.

Решење. Сада имамо комутатор:

$$[\alpha_r, \alpha_{ct}] = (\chi)(\gamma^2\chi) - (i\gamma\sqrt{1-\gamma^2\chi^2})(i\gamma^{-1}\sqrt{1-\gamma^2\chi^2}) =$$

$$= \gamma^2\chi^2 + (1-\gamma^2\chi^2) = 1,$$

дакле опет ротацију. □

Трансформације (3.120) мењају (псеудо) еуклидску метрику у Шварцшилдову, која је решење Ајнштајнових једначина гравитационог поља изван сферне масе. Оне као и Лоренцове трансформације описују сличне инерцијалне системе, са једном битном разликом. Једначине из последњег примера имају параметар вишка који им даје степен слободе више у односу на једнолико праволинијско инерцијално кретање датом брзином, дефинисаном углом ψ у (3.119). Променом параметра χ у систему (3.120) мења се угао временске осе у односу на радијалну осу поља и тиме дозвољавају различите брзине слободног пада на месту истог гравитационог потенцијала (γ).

Узгред приметимо да и Кеплеров други закон говори о ротацијама, али не у равни апсциса-време већ у просторној равни елипсе којом планета кружи око сунца. Као што знамо из физике, због очувања ангуларног момента (дакле опет због инерцијалног кретања), радијус вектор (од сунца до планете) прелази једнаке површине за једнако време. Кориштењем комутатора и дефиниције ротације (3.116), може се показати да је та Кеплерова ротација попут (3.120), али са обе просторне координате.

Наведени примери нам указују на неодвојивост простора од времена. Успоравањем тока времена скраћују се дужине, по правцу кретања у специјалној релативности или радијално у општој, да би заустављањем времена - нестале. То је последица стварања простора стварањем времена.

3.8 Јединичне матрице

Пођимо опет од трансформација (3.107), које сада пишемо матрично:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3.121}$$

односно $\hat{z}_1 = \hat{R}(\varphi)\hat{z}$, где је $\hat{R}(\varphi)$ матрица ротације за угао φ. Приметимо да је:

$$\hat{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\varphi + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin\varphi, \tag{3.122}$$

а отуда, рецимо:

$$\hat{R}(\varphi) = \hat{I}\cos\varphi + i\hat{\sigma}_2 \sin\varphi, \tag{3.123}$$

$$\hat{R}(\varphi) = \hat{I}\cos\varphi - \hat{\sigma}_5 \sin\varphi, \tag{3.124}$$

где су $\hat{\sigma}_2$ и $\hat{\sigma}_5$ редом Паулијева (3.3) и кватернионска (3.4) матрица, а $\hat{I}$ јединична матрица, све три другог реда (типа 2×2).

Пример 3.8.1. *Показати да је $\hat{R}(\alpha)\hat{R}(\beta) = \hat{R}(\alpha+\beta)$ множењем кватерниона.*

Решење. Користимо матрице (3.124) и особине (3.5):

$$\hat{R}(\alpha)\hat{R}(\beta) = (\hat{I}\cos\alpha - \hat{\sigma}_5\sin\alpha)(\hat{I}\cos\beta - \hat{\sigma}_5\sin\beta)$$

$$= \hat{I}\cos\alpha\cos\beta - \hat{\sigma}_5\sin\alpha\cos\beta - \hat{\sigma}_5\cos\alpha\sin\beta + (-\hat{I})\sin\alpha\sin\beta$$

$$= \hat{I}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) - \hat{\sigma}_5(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$= \hat{I}\cos(\alpha+\beta) - \hat{\sigma}_5\sin(\alpha+\beta)$$

$$= \hat{R}(\alpha+\beta),$$

а то је оно што је требало показати. □

Свака од три кватернионске матрице, за $\nu = 4, 5, 6$, понаша се у матричном множењу као имагинарна јединица, $\hat{\sigma}_\nu^2 = -\hat{I}$ а узајамно се множе као јединични вектори 3-дим простора $Oxyz$. Због овог другог их понекад пишемо као ортове $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$\hat{z} = z_0\hat{I} + z_1\hat{i} + z_2\hat{j} + z_3\hat{k}, \quad z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, \tag{3.125}$$

где је нпр. $\hat{i} = \hat{\sigma}_4$, $\hat{j} = \hat{\sigma}_5$ и $\hat{k} = \hat{\sigma}_6$. При томе треба разликовати имагинарни број $i = \sqrt{-1}$ од матрице $\hat{i}$, $\hat{j}$ или $\hat{k}$.

Знамо да се сваки комплексан број $z \in \mathbb{C}$ може свести на облик $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$ а $i = \sqrt{-1}$ је имагинарна јединица. Реалан и имагинаран део комплексног броја z означавамо редом са $\Re(z)$ и $\Im(z)$, који су поменути x и y редом. Коњуговано комплексни бројеви су $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, а за коњуговање важи:

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}), \tag{3.126}$$

за произвољну функцију $f(z)$ над скупом комплексних бројева. Аналогно томе, за кватернион (3.125) дефинишемо коњуговање са

$$\hat{z}^* = \bar{z}_0\hat{I} - \bar{z}_1\hat{i} - \bar{z}_2\hat{j} - \bar{z}_3\hat{k}, \quad \forall z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, \tag{3.127}$$

Очигледно је шта морају бити коњуговане основне матрице кватерниона:

$$\begin{cases} \hat{i}\hat{i}^* = \hat{\sigma}_4\hat{\sigma}_4^* = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}, \\ \hat{j}\hat{j}^* = \hat{\sigma}_5\hat{\sigma}_5^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}, \\ \hat{k}\hat{k}^* = \hat{\sigma}_6\hat{\sigma}_6^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}, \end{cases} \tag{3.128}$$

Затим хермитски коњуговане матрице $\hat{A}^*$ (или $\hat{A}^\dagger$) уопште дефинишемо са:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}. \tag{3.129}$$

Производ коњуговано комплексних бројева је квадрат модула (интензитета) тог броја, $z\bar{z} = |z|^2$. Аналогно, *траг матрице* производа коњугованих матрица је

$$\operatorname{tr}(\hat{A}\hat{A}^*) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix} = a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d} \in \mathbb{R}. \tag{3.130}$$

Зато, помоћу трага матрице можемо дефинисати квадрат модула дате матрице, али и не морамо.

Примењено на кватернионе (3.125) и (3.127), добијамо:

$$\begin{cases} \hat{z} = z_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z_1\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + z_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + z_3\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{z}^* = \bar{z}_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \bar{z}_1\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \bar{z}_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \bar{z}_3\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{3.131}$$

а отуда:

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} z_0 + iz_1 & z_2 + iz_3 \\ -z_2 + iz_3 & z_0 - iz_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{z}^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 - i\bar{z}_1 & -\bar{z}_2 - i\bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 - i\bar{z}_3 & \bar{z}_0 + i\bar{z}_1 \end{pmatrix}, \tag{3.132}$$

што је у сагласности са (3.129). Отуда

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\hat{z}\hat{z}^*) = z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3, \tag{3.133}$$

што је такође погодно да сматрамо квадратом модула кватерниона (3.125).

До неког згодног израза за „квадрат модула“ кватерниона можемо доћи и заобилазно, преко поопштеног „скаларног производа“, на следећи начин. Посматрајмо следећа два кватерниона:

$$\begin{cases} \hat{u} = u_0\hat{I} + u_1\hat{\sigma}_4 + u_2\hat{\sigma}_5 + u_3\hat{\sigma}_6, \\ \hat{v} = v_0\hat{I} + v_1\hat{\sigma}_4 + v_2\hat{\sigma}_5 + v_3\hat{\sigma}_6 \end{cases} \tag{3.134}$$

где коефицијенти u_ν, v_ν могу бити комплексни бројеви. Налазимо:

$$\hat{u}\hat{v}^* = \sum_{\beta=0}^{3} u_\beta\bar{v}_\beta\hat{I} - \sum_{\alpha=1}^{3}(u_0\bar{v}_\alpha - u_\alpha\bar{v}_0)\hat{\sigma}_{\alpha+3} - \begin{vmatrix} \hat{\sigma}_4 & \hat{\sigma}_5 & \hat{\sigma}_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{vmatrix}, \tag{3.135}$$

$$\hat{u}^*\hat{v} = \sum_{\beta=0}^{3} \bar{u}_\beta v_\beta\hat{I} + \sum_{\alpha=1}^{3}(\bar{u}_0 v_\alpha - \bar{u}_\alpha v_0)\hat{\sigma}_{\alpha+3} - \begin{vmatrix} \hat{\sigma}_4 & \hat{\sigma}_5 & \hat{\sigma}_6 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \tag{3.136}$$

па за сложени збир и разлику, $\hat{u} \oplus \hat{v} = \frac{1}{2}(\hat{u}\hat{v}^* + \hat{u}^*\hat{v})$ и $\hat{u} \ominus \hat{v} = \frac{1}{2}(\hat{u}\hat{v}^* - \hat{u}^*\hat{v})$, добијамо:

$$\hat{u} \oplus \hat{v} = \sum_{\beta=0}^{3} \Re(u_\beta \bar{v}_\beta)\hat{I} - i\sum_{\alpha=1}^{3} \Im(u_\alpha \bar{v}_0 - u_0 \bar{v}_\alpha)\hat{\sigma}_{\alpha+3} - \frac{1}{2}(\hat{D}_1 + \hat{D}_2), \tag{3.137}$$

$$\hat{u} \ominus \hat{v} = -i\sum_{\beta=0}^{3} \Im(u_\beta \bar{v}_\beta)\hat{I} + \sum_{\alpha=1}^{3} \Re(u_\alpha \bar{v}_0 - u_0 \bar{v}_\alpha)\hat{\sigma}_{\alpha+3} - \frac{1}{2}(\hat{D}_1 - \hat{D}_2), \tag{3.138}$$

где скраћено пишемо $\hat{i} = \hat{\sigma}_4$, $\hat{j} = \hat{\sigma}_5$, $\hat{k} = \hat{\sigma}_6$ и:

$$\hat{D}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{vmatrix}, \quad \hat{D}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Дакле, сложени збир који смо дефинисали на почетку ове секције (3.15), у математичкој литератури се помало брзоплето проглашава „скаларним производом“.

Посебно, када је $\hat{u} = \hat{v} = \hat{z}$, из (3.136) добијамо:

$$\hat{z}\hat{z}^* = \sum_{\beta=0}^{3} z_\beta \bar{z}_\beta \hat{I} - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}, \tag{3.139}$$

а отуда је тешко препознати (3.133).

Паулијеве матрице (3.3) имају особину $\hat{\sigma}^2 = \hat{I}$. Обично се означавају са:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.140}$$

где смо ради комплетности додали и јединичну матрицу $\hat{I}$. То су важне матрице квантне механике.

Слично кватернионима, за линеарне комбинације ових матрица важи:

$$\begin{cases} \hat{p} = p_0\hat{I} + p_1\hat{\sigma}_1 + p_2\hat{\sigma}_2 + p_3\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix}, \\ \hat{p}^* = \bar{p}_0\hat{I} + \bar{p}_1\hat{\sigma}_1 + \bar{p}_2\hat{\sigma}_2 + \bar{p}_3\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \bar{p}_0 + \bar{p}_3 & \bar{p}_1 - i\bar{p}_2 \\ \bar{p}_1 + i\bar{p}_2 & \bar{p}_0 - \bar{p}_3 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{3.141}$$

где је $p_\mu \in \mathbb{C}$ за $\mu = 0,1,2,3$. Такође слично (3.133) налазимо:

$$\frac{1}{2}\text{tr}\,(\hat{p}\hat{p}^*) = p_0\bar{p}_0 + p_1\bar{p}_1 + p_2\bar{p}_2 + p_3\bar{p}_3. \tag{3.142}$$

Употребимо ли и израз $\hat{q} = q_0\hat{I} + q_1\hat{\sigma}_1 + q_2\hat{\sigma}_2 + q_3\hat{\sigma}_3$ са комплексним коефицијентима q_μ:

$$\hat{p}\hat{q}^* = \sum_{\beta=0}^{3} p_\beta \bar{q}_\beta \hat{I} + \sum_{\alpha=1}^{3}(p_0\bar{q}_\alpha + p_\alpha\bar{q}_0)\hat{\sigma}_\alpha + i\begin{vmatrix} \hat{\sigma}_1 & \hat{\sigma}_2 & \hat{\sigma}_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & \bar{q}_3 \end{vmatrix}. \tag{3.143}$$

Само први збир у (3.143), као и у (3.135), сматрамо скаларним производом одговарајућих вектора.

Уопште, за векторе **u** и **v** n-дим простора са компонентама $u_\mu, v_\mu \in \mathbb{C}$, $\mu = 1,2,\dots,n$, скаларни производ дефинишемо са

$$\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \dots + \bar{u}_n v_n. \tag{3.144}$$

Када је тај производ нула, векторе сматрамо узајамно окомитим. У складу са овим, модул вектора је $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}}$. На пример, вектори $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{i}$ и $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{i}{1}$ су узајамно окомити, јер је

$$\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}^* \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,-i)\cdot\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(i-i) = 0,$$

и оба су јединичног модула $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$.

Вратимо се опет на ротацију (3.121) у правоуглом Декартовом систему Oxy. Уочимо сада облик $\hat{R}(\varphi)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ са параметром $\lambda \in \mathbb{C}$, односно

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}. \tag{3.145}$$

Вектор **v** назива се *сопствени вектор* матрице $\hat{R}$, а број λ је његова *сопствена вредност*. Основни геометријски смисао ове једначине био би да ротација $\hat{R}(\varphi)$ за произвољан угао φ трансформише сопствени вектор **v** у вектор истог правца. Наравно, то је у реалној равни Oxy немогуће, јер то није ротација за унапред дати угао (рецимо 180°).

Па ипак, горња једначина има решење. Преводимо је у систем:

$$\begin{cases} x\cos\varphi - y\sin\varphi = \lambda x\\ x\sin\varphi + y\cos\varphi = \lambda y,\end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\cos\varphi - \lambda) - y\sin\varphi = 0\\ x\sin\varphi + y(\cos\varphi - \lambda) = 0.\end{cases}$$

Ово је хомогени систем са тривијалним решењем $x = y = 0$, које нам није занимљиво. Да би хомогени систем имао још решења, његова детерминанта мора бити нула:

$$\begin{vmatrix}\cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda\end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\cos\varphi\lambda + 1 = 0,$$

а отуда две сопствене вредности

$$\lambda_{12} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm\varphi}. \tag{3.146}$$

Када ове бројеве вратимо у претходни систем, налазимо јединичне сопствене векторе

$$\mathbf{v}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm i\end{pmatrix} \tag{3.147}$$

Доследно гурајући геометријску интерпретацију[11], могли бисмо рећи да су сопствени вектори у комплексној равни са имагинарном осом у новој димензији додатој двема Декартовим. Када се раван Oxy ротира за произвољан угао φ, сопствени вектори остају у својој равни непромењених праваца, узајамно окомити $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.

[11] постоје и друге интерпретације

Glava 4

Апстрактни простор

Није случајно што је квантна механика најновија и истовремено најтачнија грана физике. Она се бави микро-светом који је толико далек од свакодневног да смо у тој области физике присиљени одустати од интуиције, филозофије или других убеђења и држати се само математике. Квантна механика је данас тако постављена наука да би њено оспоравање, углавном, било оспоравање саме апстрактне логике.

Излагање квантне механике се већим делом може посматрати као предавање из алгебре о векторским просторима са комплексним коефицијентима. То је прича о једној равној (еуклидској) линеарној геометрији вектора коју средњошколци упознавају већ у првом разреду. Међутим, када се у истој једноставној теорији крене ка мало конкретнијем задатку, испостави се да је решавање често скоро па немогуће. У таквим се случајевима физичари суочавају са употребом пертурбација, са покушајима да у мрежи парцијалних диференцијалних једначина од којих је математика давно одустала или до којих никада није стигла, дођу до макар каквог приближног решења. Тако упадају и у ситуације да од дрвета не виде шуму.

Апстрактна теорија која је сада пред нама је важна за квантну физику али и за основну тезу књиге [1]. У тој књизи, „Информација перцепције“, опширно је објашњаван скаларни производ вектора $\ell = \mathbf{i}\cdot\mathbf{h}$. То је алгебарски неспорна форма (не постоји начин да се докаже да је тај део алгебре нетачан) са наизглед спорним тумачењем смисла скалара ℓ као количине могућности перцепција дате јединке. Међутим, ако ово ℓ схватите као нову дефиницију, а такође и вектор $\mathbf{i}$ као до сада не дефинисану способност јединке да користи могућности, а вектор $\mathbf{h}$ као способност окружења да јединки ускрати дате могућности, тешкоће нестају. Усклађивање појма „слободе“ у социологији са скаларом ℓ, појма „интелигенције“ у психологији са вектором $\mathbf{i}$ и појма „хијерархије“ у праву са вектором $\mathbf{h}$ тек следи, верујем, као што је својевремено уследило усклађивање појма „времена“ са формулом $t = s/v$. Та спора надмоћ математичких поставки расте временом са схваћањем да њих није могуће довести у контрадикцију, за разлику од других понуда.

Зато ће овде бити изложене само поставке онога што сматрам непроцењивим обзиром на квалитет и ширину примена. Природа воли да се понавља. Она то чини свугде где јој то дозволи Паулијев принцип забране или неки сличан који спречава њено затварање у неку малу бесконачну петљу. Зато што природа воли симетрије, понављања истог у различитом, толико да не изненађује појава препознатљивих геометријских форми у свим областима егзактног, зато је и ово прича о природи времена. А опет, ове препознатљиве форме су толико сличне јер долазе из истог контејнера.

4.1 Алгебарске структуре

Алгебарска структура, или краће *алгебра*, је уређени пар $\mathbb{A} := (A, \Omega)$, где је A непразан скуп, домен алгебре $\mathbb{A}$, и Ω нека фамилија алгебарских операција скупа A. Основне алгебарске структуре су: групоиди, полугрупе (семигрупе), моноиди, групе, прстени и поља.[1].

Групоид је уређен пар $(G, *)$, где је $*$ бинарна операција скупа G. Елеменат $e \in G$ је *леви неутрал* односно *десни неутрал* групоида акко за свако $x \in G$ важи $e * x = x$ односно $x * e = x$. Елеменат $e \in G$ је *неутрал* акко[2] $(\forall x \in G)\ e * x = x * e = x$. Групоид има највише један неутрал, због $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$.

Полугрупа је групоид $(S, *)$ у коме је бинарна операција $*$ асоцијативна: за било која три елемента из S важи $(a * b) * c = a * (b * c)$. *Моноид* је полугрупа са неутралом. Елеменат $\bar{x}$ је *леви инверзни* односно *десни инверзни* елеменат x акко оба припадају скупу елемената датог моноида и $\bar{x} * x = e$ односно $x * \bar{x} = e$. Ако је елеменат $\bar{x}$ и леви и десни инверзни, назива се инверзни елеменат x или *инверз*. Произвољно x може имати само један инверз, због $\bar{x}_1 = \bar{x}_1 * e = \bar{x}_1 * (x * \bar{x}_2) = (\bar{x}_1 * x) * \bar{x}_2 = e * \bar{x}_2 = \bar{x}_2$.

Лема 4.1.1. *Нека је $(M, *, e)$ моноид. Ако су $x, y \in M$ инвертибилни, онда су e, $x * y$ и $\bar{x}$ такође инвертибилни и важи:* 1. $\bar{e} = e$; 2. $\overline{x * y} = \bar{y} * \bar{x}$; 3. $\bar{\bar{x}} = x$.

Доказ. 1. Следи из $e * e = e$.

2. Из $(\bar{y} * \bar{x}) * (x * y) = \bar{y} * (\bar{x} * (x * y)) = \bar{y} * ((\bar{x} * x) * y) = \bar{y} * (e * y) = \bar{y} * y = e$ и сличног $(x * y) * (\bar{y} * \bar{x}) = e$ следи да је $\bar{y} * \bar{x}$ инверз елемента $x * y$.

3. Следи из $x * \bar{x} = e = \bar{x} * x$. □

Група $(G, *, e)$ је моноид у коме сваки елеменат има инверз. Група (полугрупа, групоид) је комутативна акко $(\forall x, y \in G)\ x * y = y * x$. Комутативна група се назива Абелова група.

Лема 4.1.2. *Нека је $(G, *)$ полугрупа. Тада:*

1. *$(G, *)$ је група акко $(\forall x \in G)\ \bar{x} * x = e\ \wedge\ e * x = x$;*
2. *$(G, *)$ је група акко $(\exists z \in G)(\forall x \in G)(z * x = x \wedge (\exists y \in G)\ y * x = z)$.*

Доказ. Довољно је доказати да десна страна повлачи леву.

1. $x * \bar{x} = (e * x) * \bar{x} = ((\bar{\bar{x}} * \bar{x}) * x) * \bar{x} = (\bar{\bar{x}} * (\bar{x} * x)) * \bar{x} = (\bar{\bar{x}} * e) * \bar{x} = \bar{\bar{x}} * (e * \bar{x}) = \bar{\bar{x}} * \bar{x} = e$, затим $x * e = x * (\bar{x} * x) = (x * \bar{x}) * x = e * x = x$.

2. Довољно је неутрал z означити са e, инверз y елемента x са $\bar{x}$, а инверз елемента $\bar{x}$ са $\bar{\bar{x}}$, па поновити претходни доказ. □

Теорема 4.1.3. *Нека је $(M, *)$ моноид. Дефинишимо скуп инвертибилних елемената $G := \{x \in M | (\exists y \in M)\ y * x = e = x * y\}$. Тада $e \in G$, скуп G је затворен је за операцију $*$ и моноид $(G, *)$ је група.*

Доказ. Из $e * e = e$ следи $e \in G$. Доказујемо затвореност. Нека су $x, y \in G$. Тада постоје неки $\bar{x}, \bar{y} \in M$ који су инверзи елемената x, y. Због леме 4.1.1 је $\bar{y} * \bar{x} = \overline{x * y}$ инверз елемента $x * y$, па $x * y \in G$. Ако је $x \in G$ а његов инверз $\bar{x} \in M$, онда је због исте леме x инверз $\bar{x}$, па $\bar{x} \in G$. □

[1]Универзитет у Београду, Математички факултет: http://www.matf.bg.ac.rs/

[2]акко - ако и само ако

На пример, $(\mathbb{N},+)$ је комутативан групоид. Такође је то $(\mathbb{N},\text{nzd})$, где је операција „најмањи заједнички садржалац" (у скупу природних бројева). Скуп бројева $G = \{0,1,2,3\}$ са сабирањем по модулу $m = 4$ дефинисаним Кејлијевом[3] таблицом

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

је комутативна група. Неутрални елеменат је 0, а за елеменат $n \in G$ инверзан је $m-n$, јер је $n +_m (m-n) = 0 \pmod m$. Скуп ротација (3.121) равни Oxy дефинисан угловима $\varphi \in \mathbb{R}$ у односу на композицију пресликавања је група.

Структура $(P,+,*)$ је *прстен* акко је $(P,+)$ комутативна група (са неутралним елементом 0 и инверзом $-x$ елемента x) и важе закони дистрибуције $(\forall x,y,z \in P)$ леве $x*(y+z) = (x*y)+(x*z)$ и десне $(y+z)*x = (y*x)+(z*x)$. Прстен је асоцијативан када је и друга операција асоцијативна, када за све $x,y,z \in P$ важи $(x*y)*z = x*(y*z)$. Прстен је са јединицом 1 када друга операција има неутрални елеменат, који називамо јединицом. Када је $(P,*)$ група, прстен се назива *тело*. Комутативно тело је *поље*.

Теорема 4.1.4. *Нека је $(P,+,*)$ прстен. Тада:*

1. $x*0 = 0 = 0*x$;
2. $x*(-y) = -(x*y) = (-x)*y$, $(-x)*(-y) = xy$;
3. *Ако* $x-y := x+(-y)$, *онда* $x*(y-z) = x*y - x*z$, $(x-y)*z = x*z - y*z$;
4. $(x_1+\dots+x_n)*y = x_1*y+\dots+x_n*y$, $x*(y_1+\dots+y_n) = x*y_1+\dots+x*y_n$;
5. $(x_1+\dots+x_n)*(y_1+\dots+y_n) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i*y_j = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n x_i*y_j$.

Доказ. 1. Из $x*0 = x*(0+0) = x*0+x*0$ следи $x*0 = x*0+x*0$, отуда $x*0+(-x*0) = (x*0+x*0)+(-x*0) = x*0+(x*0+(-x*0))$, а отуда $0 = x*0$. Слично, $0 = 0*x$.

2. Из $0 = x*0 = x*(-y+y) = x*(-y)+x*y$ следи $0 = x*(-y)+x*y$, отуда $0+(-x*y) = (x*(-y)+x*y)+(-x*y) = x*(-y)+(x*y+(-x*y))$, а отуда $-x*y = x*(-y)$. Слично, $-x*y = (-x)*y$. Из претходних једнакости следи $(-x)*(-y) = -(-x)*y = -(-x*y) = x*y$.

3. $(x-y)*z = (x+(-y))*z = x*z+(-y)*z = x*z+(-y*z) = x*z-y*z$.

4. Индукцијом, користећи дистрибутивност.

5. Следи из 4. □

Примери комутативних прстенова са јединицом су скупови целих $\mathbb{Z}$, рационалних $\mathbb{Q}$, реалних $\mathbb{R}$, или комплексних бројева $\mathbb{C}$ са уобичајеним операцијама сабирања и множења.

Дефиниција 4.1.5. Векторски простор *над телом Φ је комутативна група $(X,+)$ у којој је дефинисано множење с елементима из Φ такво да $(\forall\lambda \in \Phi)(\forall x \in X)\ \lambda x \in X$. При томе за све $x,y \in X$ и $\alpha,\beta \in \Phi$ важе једнакости:*

1. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,
2. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y$,
3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
4. $1 \cdot x = x$.

Елементе скупа X називамо векторима, елементе скупа Φ називамо скаларима. Векторе сабирамо а скаларе са векторима множимо.

[3] Arthur Cayley (1821-1895), британски математичар.

Примери векторских простора су скуп $\mathbb{R}$ реалних бројева над реалним бројевима, са уобичајеним операцијама сабирања и множења. Скуп $\mathbb{C}$ комплексних бројева над телом комплексних бројева, са уобичајеним сабирањем и множењем. Оријентисане дужи над реалним (комплексним) бројевима, такође чине векторски простор.

Теорема 4.1.6. *У векторском простору важе следеће релације:*

1. $x + y = y + z \Rightarrow y = z$;
2. $x = y \iff x - y = 0$, *где* $x - y$ *значи* $x + (-y)$;
3. $0x = 0$;
4. $\lambda 0 = 0$;
5. $(-1)x = -x$;
6. $\lambda x = 0 \wedge \lambda \neq 0 \Rightarrow x = 0$;
7. $\lambda x = \lambda y \wedge \lambda \neq 0 \Rightarrow x = y$;
8. $\lambda x = 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$;
9. $\lambda x = \mu x \wedge x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \mu$.

Доказ. 1. На основу особина тела (комутативности, асоцијативности и егзистенције нуле), из $x + y = x + z$ следи:

$$y + x = z + x,$$
$$(y + x) + (-x) = (z + x) + (-x),$$
$$y + [x + (-x)] = z + [x + (-x)],$$
$$y + 0 = z + 0,$$
$$y = z.$$

2. На основу егзистенције инверза тела, из $x = y$ следи $x + (-y) = y + (-y) = 0$.

3. Из егзистенције нуле и 2. особине вектора следи $\lambda x + 0 = \lambda x = (\lambda + 0)x = \lambda x + 0x$, а затим користимо 1. тврђење овде.

4. Из егзистенције нуле и 1. особине вектора следи $\lambda x + 0 = \lambda x = \lambda(x + 0) = \lambda x + \lambda 0$, а затим користимо 1. тврђење.

5. Из егзистенције нуле, јединице и 2. особине вектора је $x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0x = 0$, па је $(-1)x$ је инверз вектора x.

6. Из егзистенције јединице и 3. особине вектора $x = 1x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}0 = 0$, а користимо и 4. овде.

7. На основу 2. и 6 овде и особине 1. вектора, из $\lambda x = \lambda y$ следи $\lambda x - \lambda y = 0$, па $\lambda(x - y) = 0$, затим $x - y = 0$, и користимо 2. овде.

8. Ако је $\lambda \neq 0$, тада из $\lambda x = 0$ због 6. овде, следи $x = 0$, супротно претпоставци $x \neq 0$. Значи $\lambda = 0$.

9. На основу 1. овде, 2. вектора и 7. овде, имамо $\lambda x = \mu x$, затим $\lambda x - \mu x = 0$, па $(\lambda - \mu)x = 0$, а отуда $\lambda - \mu = 0$. □

Алгебра векторских простора овако постављена важи за све своје репрезентације без изузетка, па и за оне које користи актуелна квантна механика. Та њена универзалност потврђује нашу претпоставку да време, простор и материја настају негде из истих извора, из неизвесности која се реализује у различитим облицима. У самој суштини случајности је могућност различитих реализација. Са друге стране, екстремна тачност алгебарских ставова и слично понашање њених репрезентација сведоче о неодвојивости материјалног физичког од апстрактног математичког[4].

[4]Критикујем филозофска учења у којима је бит физичког негде изван логичког.

Трећа примедба била би да је алгебра без својих репрезентација једнако једнострана као физика без логике. Држећи се само ставова попут претходних били бисмо као путник у брзом возу који посматра пејзаже који пролазе али не види ништа од мноштва, скоро бескрајне различитости и савршенства детаља. Тек када изађе из воза и пажљиво посматра мраве, траву, сићушне делове тла, тај путник може бити биолог, хемичар, геолог. Следећи ову филозофију, настављамо са разматрањем поменутих алгебарских структура у правцу квантне физике.

Пример векторских простора је скуп матрица истог типа (типа $r \times k$ са фиксним бројем r редака и k колона) над телом комплексних бројева, са матричним сабирањем и множењем матрице бројем. Збир две матрице (x_{ij}) и (y_{ij}) је матрица $(x_{ij} + y_{ij})$, а производ скалара λ и рецимо матрице (x_{ij}) је матрица (λx_{ij}). Приметимо да матрицу можемо ред по ред нанизати у једну n-торку ($n = rk$) комплексних бројева, па је посматрати и као уређен низ (коначан или бесконачан).

Скуп $\mathbb{C}^n$ уређених n-торки $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ за дато коначно $n \in \mathbb{N}$, па и у случају $n \to \infty$, над скупом комплексних бројева је векторски простор. За $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ збир је $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n)$, а производ скалара λ и рецимо x је $\lambda x = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \dots, \lambda\xi_n)$. Овакав простор се назива Хилбертов.

Уређене n-торке бројева могу бити информације. Разматрајући (1.1), приметили смо да бацање фер новчића и коцке има по 2 („писмо“ и „глава“) односно 6 (бројеви 1,2,3,4,5 и 6) могућих исхода, док бацање обоје има $2 \times 6 = 12$ могућности:

п1	п2	п3	п4	п5	п6
г1	г2	г3	г4	г5	г6

Могућности се множе а информације се сабирају и зато је информација логаритам броја (једнаковероватних) могућности[5]. Зато што се информације сабирају оне би могле бити компоненте n-торки скупа $\mathbb{C}^n$ над скупом комплексних бројева, под условом да их можемо разумети и као логаритме комплексних (имагинарних) бројева.

Знамо да нуле полиномске функције $y = f(x)$ могу бити и комплексни бројеви, али да тада оне не представљају тачке пресека апсцисе и графа функције. Упркос такве мањкавости ми нећемо рећи да једначина $f(x) = 0$ нема и тих нереалних решења, а онда поготово можемо прихватити и нереалну информацију.

Држећи се тих проверених форми, проширујемо појам неизвесности и информације на комплексне бројеве. Информација која је реалан број је реална. Случајност је реална ако се реализује у реалну информацију. Што се тиче физикалног, реално је оно што је у комуникацији са реалним. Према томе, информација и неизвесност могу бити тако нереалне да нису контрадикторне, а са друге стране, између нереалног и реалног нема до сада непремостивих граница.

Дефиниција 4.1.7. *За* $z \in \mathbb{C}$ *пишемо* $\ln z = \ln|z| + i\arg(z)$.

За комплексни број $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, на слици комплексне равни 3.1 модул је дужина $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а аргумент је угао $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ у радијанима. Модул $|z| = \rho$ је растојање од исходишта до тачке која представља дати комплексни број, а аргумент $\arg(z) = \alpha$ је угао између апсцисе и радијус вектора тог броја. Отуда:

$$z = \rho e^{i\alpha} = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha). \tag{4.1}$$

[5] в. доказ теореме 3.3.1 у књизи [1].

Логаритам комплексног броја је[6] периодична функција са основним периодом 2π. То је *комплексна информација*. Збир коњуговано комплексних информација је реалан број који називамо информацијом.

Релацију (4.1) можемо написати и у облику

$$z = e^{\ln|z|+i\arg(z)} = e^{\ln|z|}[\cos\arg(z) + i\sin\arg(z)], \tag{4.2}$$

где је $\rho = \exp(\ln|z|)$ и $\alpha = \arg(z)$, из чега се види да је аргумент множен имагинарном јединицом имагинарна информација. Комплексан број од којег узимамо логаритам је број *комплексних могућности*, случајних исхода. Комплексне могућности се такође периодично понављају, са периодом 2π. Производ коњуговано комплексних могућности је реалан број који називамо *бројем могућности*.

Када на овај начин пишемо информације које генеришу нашу садашњост и време уопште, онда све појаве које доводе до информација морамо сматрати периодичним. Тиме само потврђујемо Луј де Бројеву[7] хипотезу (данас прихваћену тезу) о таласној природи све материје, па према томе можемо наставити са овом.

Још увек говоримо само о равноправним могућностима, јер за њих верујемо да су довољно честа појава да вреде труда. Број могућности је обрнуто пропорционалан вероватноћи. Више кугли у лото бубњу смањује вероватноћу извлачења једне, тако да је производ броја кугли и вероватноће једне - један.

Према томе, ако је $L = \ln z$ комплексна информација, онда је комплексан број могућности $z = \exp(L)$, а комплексна вероватноћа $\psi = z^{-1} = \exp(-L)$. Информација која је реална, рецимо $I = \bar{L} + L$, представљаће реалан број могућности $\bar{z}z = \exp(I)$ односно реалну вероватноћу $\psi^*\psi = \exp(-I)$. Ако за реалну информацију узмемо половину коњуговано комплексних (аритметичку средину), или неки трећи збир, свеједно ће реална вероватноћа бити производ (не нпр. корен производа) коњуговано комплексних вероватноћа. То је у складу са Борновом[8] правилом вероватноће.

Примери скупа $\mathbb{C}^n$ уређених n-торки над скупом комплексних бројева су низови комплексних информација $(L_1, L_2, \dots, L_N)$, али и низови вероватноћа $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$. То показује универзалност алгебре која, чини се, обезвређује снагу њене примене у конкретној физици. Да смо рецимо открили ове репрезентације, а да не познајемо данашњу физику микро-света, ми се не бисмо могли убедити да оне говоре о некој физичкој реалности. Са друге стране, ако успоставимо јаче везе између реалних физичких појава и ових репрезентација, онда је рушење физичке теорије утолико више рушење саме алгебре. То је она веза између математике и науке због које кажемо: наука је тачно онолико тачна колико користи математику.

При томе се претпоставља да су математичке истине неспорне, апсолутно тачне. Наиме, доказ Талесове теореме (7. век п.н.е.) или Питагорине теореме (6-5. век п.н.е.), једнако је тачан данас као и онда. Математички докази због своје многовековне старости не губе на својој убедљивости, они нас развојем математике само убеђују их је немогуће оспоравати. Насупрот све шароликости и слојевитости „истина“ којима смо окружени у политици, праву, наукама, нико никада није успео да неку математичку истину доведе у контрадикцију са неком другом математичком истином. У том смислу треба разумети изјаву: „Ако се физика не слаже са овом репрезентацијом алгебре, утолико горе за физику“.

[6] сводећи угао $\alpha \to \alpha + 2k\pi$ на основни интервал

[7] Louis de Broglie (1892-1987), француски физичар.

[8] Max Born (1882-1970), немачки физичар и математичар.

4.2 Норма вектора

Различити су начини да се произвољан дати векторски простор нормира и да му се уведе метрика. Ипак, сви ти начини имају неколико заједничких особина.

Дефиниција 4.2.1. *Векторски простор комутативне групе* $(X,+)$ *над телом* Φ *је* нормиран *ако постоји ненегативна функција дефинисана за свако* $x \in X$ *коју називамо* норма *од* x *и означавамо са* $\|x\|$, *таква да је:*
1. $\|0\| = 0$ *и* $\|x\| > 0$ *за* $x \neq 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ *за свако* $\lambda \in \Phi$;
3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

У нормиран простор метрика се уводи са $d(x,y) = \|x-y\|$.

Комплетан нормиран векторски простор назива се Банахов[9]. То је простор са метриком којом се може израчунати дужина (сваког) вектора као и удаљеност између вектора, а комплетан је у смислу да (сваки) Кошијев низ вектора има граничну вредност. Кошијев је низ чији су узастопни елементи произвољно близу за довољно велике индексе елемената.

На пример, векторски простор $\mathbb{C}^n$ чији вектори су уређене n-торке комплексних бројева $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, може се нормирати са

$$\|z\|_p = (|\zeta_1|^p + |\zeta_2|^p + \dots + |\zeta_n|^p)^{1/p}, \tag{4.3}$$

где је $p \ge 1$ произвољан реалан број. Особине норме 1. и 2. тривијално важе, а 3. следи из Минковскијеве неједначине. За $p = 2$ добијамо уобичајену дужину вектора у Еуклидском простору. Ова норма прелази у

$$\|z\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |\zeta_k| \tag{4.4}$$

kада $p \to \infty$.

Пример 4.2.2. *Доказати Кошијеву неједнакост*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right), \tag{4.5}$$

за произвољне $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Доказ. За произвољно $\lambda \in \mathbb{R}$ дефинишемо функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^n (a_k + \lambda b_k)^2.$$

Биће увек $f(\lambda) \ge 0$, јер су квадрати реалних бројева ненегативни. Отуда:

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^n (a_k^2 + 2\lambda a_k b_k + \lambda^2 b_k^2) \ge 0,$$

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^n a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \ge 0,$$

[9] Stefan Banach (1892-1945), пољски математичар.

а то је квадратна неједначина по λ чија дискриминанта није већа од нуле. Зато:

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \le 0,$$

а отуда тражена неједнакост. □

Ово је доказ оног што знамо из скаларног производа вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ у Декартовим правоуглим системима са $n \in \mathbb{N}$ димензија:

$$\begin{cases} \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n, \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\varphi, \\ |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \end{cases} \tag{4.6}$$

где је $\varphi = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ угао између датих вектора. Из $\cos\varphi \le 1$ следи (4.5). Са друге стране, тачке $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и исходиште координатног система O су темена троугла за који из геометрије знамо да важи неједнакост троугла. Ту неједнакост алгебарски доказујемо у следећем примеру.

Пример 4.2.3. *Доказати неједнакост Минковског за* $p = 2$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}, \tag{4.7}$$

за произвољне $a_k, b_k \in \mathbb{R}$*, користећи Кошијеву неједнакост (4.5).*

Доказ. Квадрирамо биноме и преуређујемо:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + 2a_kb_k + b_k^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_kb_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 =$$

користимо Кошијеву неједнакост:

$$\le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2,$$

па коренујемо (почетни и крајњи израз). □

Да кореновање и квадрирање позитивних бројева чува неједнакост, такође се може доказати алгебарски. Погледајмо то у следећем примеру.

Пример 4.2.4. *Доказати да важи еквиваленција*

$$a < b \iff a^2 < b^2 \tag{4.8}$$

ако је $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a > 0$*,* $b > 0$*.*

Доказ. Потребан услов. Из $a < b$ множећи са a и b добијамо:

$$a^2 < ab \quad \land \quad ab < b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 < b^2,$$

због транзитивности релације поретка.

Довољан услов. Из $a^2 < b^2$ следи $b^2 - a^2 > 0$, па:

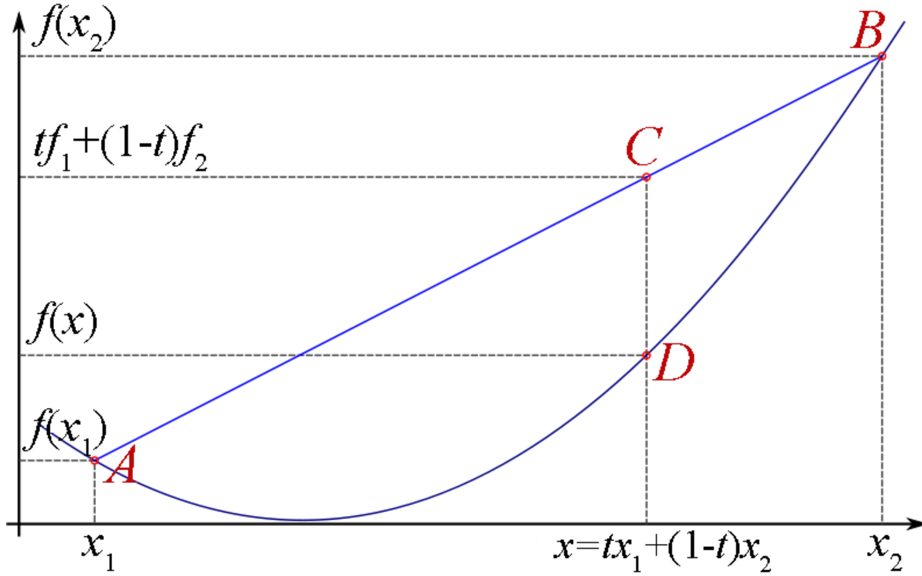
$$(b-a)(b+a) > 0,$$

$$(b-a)(b+a)(b+a)^{-1} > 0 \cdot (b+a)^{-1}, \quad (b+a>0)$$

$$b-a > 0,$$

а отуда $a < b$. □

Квантна физика данас користи норму вектора (4.3) само за $p = 2$, али ћемо због потпуности доказати и коректност те норме за општи случај $p \geq 1$. Прва теорема је Јангова[10] неједнакост, друга је Холдерова[11], а трећа Минковског[12].



Slika 4.1: Конвексна функција.

Потсетимо се да су логаритамска и експоненцијална функција инверзне, прва је конкавна а друга конвексна. Затим приметимо да за конвексне функције $y = f(x)$ на интервалу $[a,b]$ важи неједнакост

$$(\forall x_1, x_2 \in [a,b])(\forall t \in [0,1])\ f[tx_1 + (1-t)x_2] \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \tag{4.9}$$

при чему за стриктно конвексне функције важи строга неједнакост. Наиме, координате тачака на слици 4.1 су $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$ и $D(x, f(x)$, али је ордината тачке D мања од C.

Теорема 4.2.5 (Јангова неједнакост). *За позитивне реалне бројеве a, b, p, q важи*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \Rightarrow\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{4.10}$$

при чему важи једнакост акко $b = a^{p-1}$.

[10] William Henry Young (1863-1942), енглески математичар.
[11] Otto Ludwig Hölder (1859-1937), немачки математичар.
[12] Hermann Minkowski (1864-1909), немачко-пољско-јеврејски математичар.

Доказ. Користимо особине природног логаритма:

$$ab = \exp[\ln(ab)] = \exp(\ln a + \ln b) = \exp\left(\frac{1}{p}p\ln a + \frac{1}{q}q\ln b\right) =$$

$$= \exp\left[\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)\right] \le \frac{1}{p}\exp[\ln(a^p)] + \frac{1}{q}\exp[\ln(b^q)] = \frac{a^p}{q} + \frac{b^q}{q}.$$

Експоненцијална функција $y = \exp(x)$ је строго конвексна. □

Теорема 4.2.6 (Холдерова неједнакост). *Ако су x_k, y_k коначни или бесконачни али конвергентни низови реалних бројева, за дато $p > 1$ и $q \in \mathbb{R}$ такво да је $1/p + 1/q = 1$ и*

$$\sum |x_k|^p < \infty, \quad \sum |y_k|^q < \infty,$$

важи неједнакост

$$\sum |x_k y_k| \le (\sum |x_k|^p)^{1/p} (\sum |y_k|^q)^{1/q}, \tag{4.11}$$

где се сабира по (свим) индексима k.

Доказ. Прво претпоставимо да је $\sum |x_k|^p = \sum |y_k|^q = 1$ и применимо Јангову неједнакост:

$$|x_k y_k| \le \frac{1}{p}|x_k|^p + \frac{1}{q}|y_k|^q,$$

$$\sum |x_k y_k| \le \frac{1}{p}\sum |x_k|^p + \frac{1}{q}\sum |y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Затим, претпоставимо да дати редови конвергирају али не јединици, па формирајмо нове низове:

$$a_k = x_k(\sum |x_k|^p)^{-1/p}, \quad b_k = y_k(\sum |y_k|^q)^{-1/q},$$

чији одговарајући збирови јесу јединице. Из претходне неједнакости добијамо:

$$\sum |a_k b_k| = \sum \frac{|x_k y_k|}{(\sum |x_k|^p)^{1/p}(\sum |y_k|^q)^{1/q}} \le 1,$$

а затим тражену Холдерову (4.11). □

Занимљиво поопштење Холдерове неједнакости може се видети на сајту Van Khea[13]. Друга поопштења иду у правцу Лебегових интеграла, из којих следи одговарајућа (4.3) норма вектора у облику интеграла.

Теорема 4.2.7 (Неједнакост Минковског). *Ако су x_k, y_k коначни или бесконачни али конвергентни низови реалних бројева и за дато $p > 1$ је*

$$\sum |x_k|^p < \infty, \quad \sum |y_k|^p < \infty,$$

тада важи неједнакост

$$(\sum |x_k + y_k|^p)^{1/p} \le (\sum |x_n|^p)^{1/p} + (\sum |y_k|^p)^{1/p}, \tag{4.12}$$

где се сабира по индексима k.

[13] `https://vankheakh.wordpress.com/2010/12/11/a-generalization-of-holders-inequality/`

Доказ. Нека је $z_k = x_k + y_k$, имамо:

$$|z_k|^p = |x_k + y_k|^p = |x_k + y_k||z_k|^{p-1} \le |x_k||z_k|^{p-1} + |y_k||z_k|^{p-1},$$

$$\sum |z_k|^p \le \sum |x_k||z_k|^{p-1} + |y_k||z_k|^{p-1},$$

$$\sum |z_k|^p \le (\sum |z_k|^{qp-q})^{1/q}[(\sum |x_k|^p)^{1/p} + (\sum |y_k|^p)^{1/p}], \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Примењена је Холдерова неједнакост, а приметимо да је $qp - q = p$ и. Отуда тражена неједнакост Минковског (4.12). □

Обе неједнакости, Холдерова и Минковског, имају своје интегралне облике којима се може потврдити исправност дефиниција норме

$$||x|| = \left(\int_D |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \tag{4.13}$$

диференцијабилних и интеграбилних функција дате варијабле t на датом домену D. Овај континуални, као и дискретни случај норме (4.3), за квантну механику су интересантни само са параметром $p = 2$.

Када векторски простор над скупом комплексних бројева чине вектори $\mathbf{x}$ над скупом комплексних бројева, сваку од норми (4.3) и (4.13) пишемо кратко $||\mathbf{x}||^2 = \mathbf{x}^*\mathbf{x}$, у првом случају подразумевајући сабирање одговарајућих компоненти по датом правилу, у другом интегралење на одговарајућем домену:

$$||\mathbf{x}||^2 = \sum \mathbf{x}_k^*\mathbf{x}_k, \quad ||x||^2 = \int_D \mathbf{x}^*(t)\mathbf{x}(t)\, dt. \tag{4.14}$$

Када радимо са векторским простором чији логаритми су комплексне информације, због (4.1), ове норме представљају вероватноће. Вектори су периодичне функције, а оно што они представљају су случајне таласне појаве које се подвргавају законима вероватноће. Квантна физика ради само са таквим просторима.

Отуда свака од норми (4.14) у квантној механици, када описује извесну (сигурну) појаву, има вредност један. Посебно, стационарна честица представљена са (1.54) не мора бити схваћена као решење неке једначине (Шредингерове), већ је довољно рећи да је то функција $\psi(x) = A\exp(ikx)$ која представља комплексну вероватноћу догађаја чију комплексну информацију ikx имамо на месту x.

Све док поједини вектори представљају вероватноће независних (дисјунктних) случајних догађаја, дотле важе правила из дефиниције 4.1.5. То су правила за сабирање комплексних вероватноћа. Другим речима, квантна механика репрезентује векторски простор вероватноћа независних случајних догађаја. Честице, групе честица и уопште независни случајни догађаји, у смислу независности у оквиру теорије вероватноће, су *квантна стања* које представљају ти вектори квантне физике које уобичајено називамо таласним функцијама.

Због принципа вероватноће (највероватније се догађа најчешће) и зато што је информација (негативан логаритам вероватноће) већег броја мања, они догађаји који носе више информације - ређе се догађају. Зато што је природа шкрта са давањем информација, квантно стање чува информацију, све док на њега не делује неко друго стање или сила и не изнуди му одавање те информације. Не комуницира све са свачим, али и у евентуалној размени информација, квантно стање настоји очувати своје претходне количине.

4.3 Линеарне операције

Линеарни спој или *линеарна комбинација* вектора $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ је

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in X, \tag{4.15}$$

где су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Phi$ скалари. Кажемо да су вектори (x_k) линеарно независни или кратко *независни*, ако важи релација

$$(x = 0) \iff (\forall k)\ \lambda_k = 0, \tag{4.16}$$

иначе су линеарно зависни.

Када су вектори линеарно зависни, тада је бар један скалар (λ_k) различит од нуле, рецимо λ_1. Делењем (4.16) са $\lambda_1 \ne 0$ добијамо

$$x_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) x_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) x_n, \tag{4.17}$$

што значи да је x_1 линеарни спој вектора $x_2, \dots, x_n$. Отуда следећа дефиниција.

Дефиниција 4.3.1. *Ако је S скуп вектора чија линеарна комбинација, вектора било којег његовог подскупа са било којим одговарајућим низом скалара, може бити једнака нули само ако су сви ти скалари нуле, онда кажемо да је S линеарно независан скуп вектора.*

На пример, ако су $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ реални бројеви, тада су у простору реалних непрекидних функција над комплексним бројевима вектори $x_k = \exp(a_k t)$ линеарно независни. Наиме, из $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ следи $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \exp(a_k t) = 0$, а након делења са $\exp(a_n t)$ и када $t \to \infty$ добијамо $\lambda_n = 0$. Затим слично добијамо $\lambda_{n-1} = 0$, затим $\lambda_{n-2} = 0$ и даље редом све до $\lambda_1 = 0$.

Други пример линеарно независних вектора су функције $z_k = x_k \exp(i b_k t)$, где су x_k вектори из претходног примера, сви b_k су реални бројеви, а $i = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица. Слично претходном, опет из $\sum \lambda_k z_k = 0$ следи $\lambda_k = 0$ за свако k. Такође, вектори $z_k = \exp(c_k t)$ где су $c_k = a_k + i b_k$ комплексни бројеви да $|c_1| < |c_2| < \dots < |c_n|$, чине линеарно независан скуп ако реални параметар t може узимати неограничене вредности.

Отуда су независни и вектори квантних стања[14] $\psi_k(x) = A_k e^{ikx}$. Дакле, квантна стања чине независни вектори простора квантне механике, са друге стране то су честице-таласи, групе таквих честица или њихове особине, а онда то су и комплексне вероватноће независних случајних догађаја.

Дефиниција 4.3.2. *Непразан скуп $X_0 \subseteq X$ је* потпростор *векторског простора X, ако је X_0 векторски простор с обзиром на операције које су дефинисане у X.*

Нул-вектор и цели простор X тривијални су примери потпростора. Нетривијални потпростори су правац или равнина који садрже исходиште 3-дим простора. Скуп свих полинома степена не већег од $n \in \mathbb{N}$ је нетривијални потпростор скупа свих полинома. Скуп свих полинома је потпростор скупа свих функција.

[14] Литература физике ретко тумачи „квантно стање“.

Пресек $X_0 = X_1 \cap X_2$ два потпростора $X_1, X_2 \subseteq X$ такође је потпростор. Наиме, из $x_1, x_2 \in X_0$ за све $\lambda_1, \lambda_2 \in \Phi$ и $x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ следи $x_0 \in X_1$ и $x_0 \in X_2$, затим $x_0 \in X_0$. Отуда, сваком непразном скупу $S \subseteq X$ придружен је јединствен потпростор $L(S)$ који има једно од следеће две особине:

1. $L(S)$ је пресек свих потпростора који садрже скуп S;
2. $L(S)$ садржи све линеарне комбинације елемената скупа S и само њих.

За потпростор $L(S) \subseteq X$ кажемо да је разапетог скупом вектора $S \subseteq X$.

Дефиниција 4.3.3. *Скуп који се састоји од линеарно независних елемената простора X и који разапиње простор X назива се алгебарска или Хамелова* база простора X.

Број елемената базе простора назива се димензија простора X и означава $\dim(X)$. Према броју димензија, ове апстрактне просторе делимо на коначно и бесконачно димензионалне. Коначно димензионални простори се могу проучавати без било каквих даљих ограничења и они су предмет *алгебре.* Математичка дисциплина која се бави бесконачно димензионалним просторима, са додатним претпоставкама о простору X, назива се *функционална анализа.*

Теорема 4.3.4. *У коначно димензионалном простору X постоји база. Било које две базе простора X имају једнак број елемената.*

Доказ. Како је X коначно димензионалан, то постоји бар један коначан скуп S који разапиње X. То је скуп од коначно од нуле различитих линеарно независних елемената, рецимо $e_1, e_2, \dots, e_n$. Вектори e_k образују базу, па X има бар једну коначну базу.

Нека је $S' = \{e'\}$ произвољна база у X. Ако је $e'_1 \in S'$ онда су вектори $e'_1, e_1, e_2, \dots, e_n$ линеарно зависни и разапињу X. Идући слева удесно избацимо први вектор тог низа који је зависан од претходних. Добијамо нови низ $e'_1, e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-1}}$ са n елемената који разапиње X. Ако је $e'_2 \in S' \backslash \{e'_1\}$ тада низ $e'_2, e'_1, e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_{n-1}}$ разапиње X и вектори тога низа су линеарно зависни. Поново избацимо први слева вектор зависан од претходних и добијамо низ са два примована вектора и $n-2$ непримована, који разапиње X. Поновимо тај поступак све док се може.

Ако S' има више од n елемената, онда након $m \le n$ корака добијамо низ e'_m, e'_{m-1}, ..., e'_2, e'_1 који разапиње X. Али тада постоји $e' \in S'$ који је линеаран спој вектора $e'_1, e'_2, \dots, e'_m$, а то је супротно претпоставци да је S' база. Према томе, S' не може имати више од n вектора, тј. свака база у X има коначно много елемената. Ако је пак n' број елемената у скупу S' онда је $n' \le n$, па ће из истих разлога (тада је n' коначно) бити $n \le n'$. Дакле, $n = n' = \dim(X)$. □

Нека су $X_1, X_2 \subseteq X$ два потпростора и нека је $S = X_1 \cup X_2$. Размотримо потпростор $L(X_1, X_2) = L(S)$ одређен скупом S. Сваки елеменат $x \in L(X_1, X_2)$ има облик $x = x_1 + x_2$ где $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$, али и обрнуто, сваки елеменат тог облика је у потпростору којег разапиње S. Потпростор

$$L(X_1, X_2) = \{x_1 + x_2 | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} \tag{4.18}$$

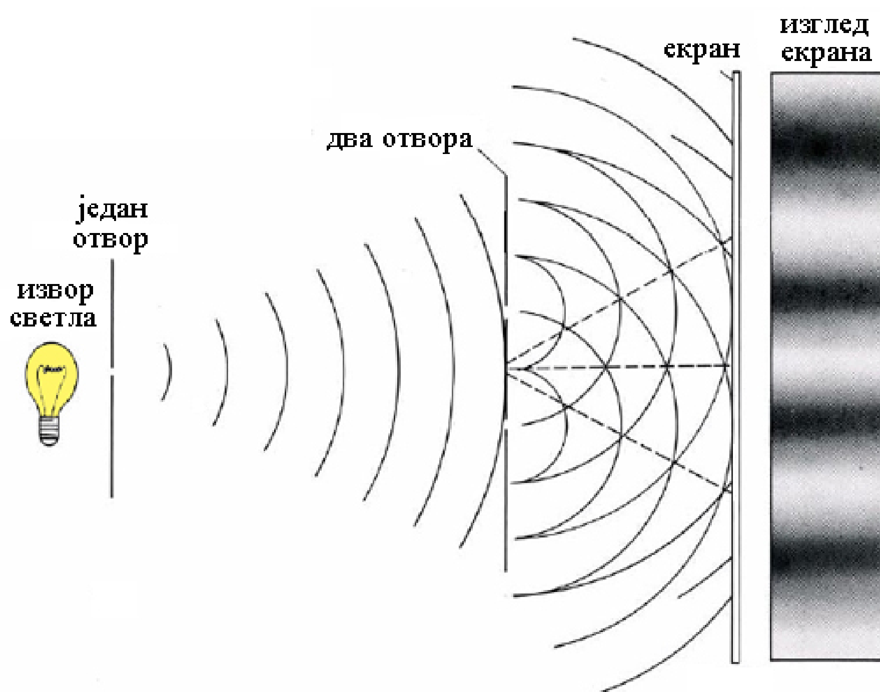
називамо *збиром потпростора* X_1 и X_2, и означавамо $X_1 + X_2$. Уопште, ако је X_1, X_2, ..., X_n, ... коначан, пребројив или непребројив низ потпростора X, онда $\sum_k X_k$ означава простор разапет скупом $S = \bigcup_k X_k$. Тада је $x \in \sum_k X_k$ акко постоји коначан скуп од нуле различитих вектора $x_k \in X_k$, таквих да је $x = \sum_k x_k$.

Обрнуто, ако су X_1 и X_2 потпростори и $Y = X_1 + X_2$ онда кажемо да је Y растављен на збир два потпростора X_1 и X_2. Ако је приказ произвољног елемента $y = x_1 + y_2 \in Y$

једнозначан, тако да су $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ једнозначно одређени вектором y, онда се збир назива *директан збир* и означава са $X_1 \oplus X_2$.

Простор базе са $n \in \mathbb{N}$ елемената означавамо X^n чиме се наглашава његова димензија. За простор који се састоји само од нула-вектора кажемо да је димензије нула. Може се доказати да из $X^n = X^p \oplus X^q$ следи $n = p + q$ и обрнуто. Такође, ако су $(e_1, \dots, e_p)$ и $(e'_1, \dots, e'_q)$ базе редом у X^p и X^q, тада је $(e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_q)$ база у X^n. Простор X^q назива се *директни комплемент* простора X^p у односу на X^n.

Директни комплемент X^{n-p} није једнозначно одређен потпростором X^p. На пример, у еуклидском 3-дим простору E^3 потпростор E^2 је равнина коју разапињу неки вектори $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Било који вектор $\mathbf{e}_3$ који не лежи у тој равнини је комплемент E^2. Уопште, сваки систем линеарно независних вектора коначно димензионалног простора може се допунити до базе тог простора. Сваки потпростор коначно димензионалног простора има бар један директан комплемент. Ови закључци се лако преносе на бесконачно димензионалне просторе функционалне анализе.

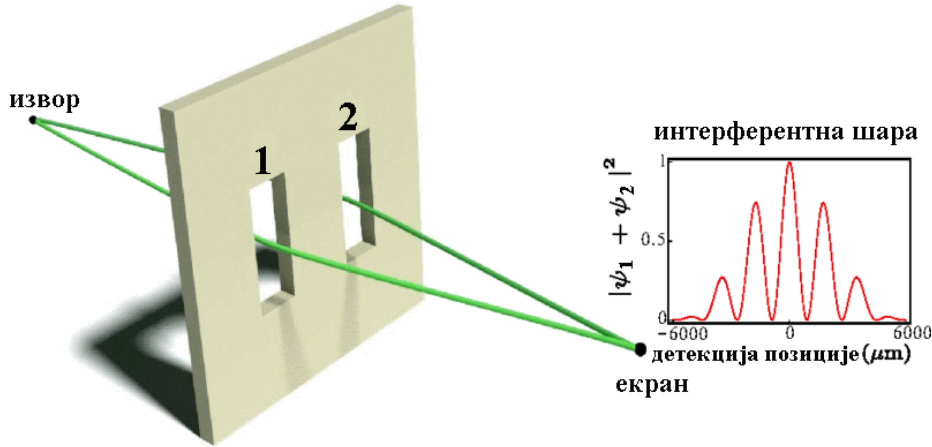


Slika 4.2: Експеримент са два отвора.

Размотримо ово на познатом експерименту са два мала отвора приказаном на слици 4.2. Фотони, електрони или неке треће честице-таласи полазе од извора кроз „један отвор“ који их усмерава ка препреци „два отвора“ иза које стоји „екран“ на којем се мери фреквенција (укупна енергија) пристиглих честица. На повшини тог пријемника „изглед екрана“ појавиће се пруге са различитим измереним количинама честица, што је последица интерференције након проласка честица кроз оба отвора.

Када је један од два отвора затворен и честице пролазе само кроз онај други, тада нема интерференције и нема пруга различитих интензитета на екрану. Такође, сваки успешан покушај мерења кроз који од отвора је честица прошла завршава губитком интерференције и пруга на екрану. Међутим, интерференција се јавља и када кроз два отвора пролази једна по једна честица-талас пуштана са задршком.

Сада овај експеримент посматрајмо као репрезентацију векторског простора. Могли бисмо за модел такве репрезентација посматрати векторе „неизвесност-информација“ посебно првог и другог отвора на застору, редом L_1 и L_2, али нећемо[15]. Користити ћемо експоненцијалне вредности тих вектора, $\psi_1 = \exp(L_1)$ и $\psi_2 = \exp(L_2)$, са којима ради данашња физика. Такве векторе овде називамо комплексним вероватноћама[16], а они су заправо типични у савременој квантној механици, коју бисмо комотно могли називати Борнова репрезентација алудирајући на векторе вероватноћа.



Slika 4.3: Интерференција кроз два отвора.

Већ смо видели да вектори квантних стања представљају независне векторе општег, апстрактног векторског простора. Ови ψ_1 и ψ_2 разапињу различите 1-дим векторске просторе, са збирним вектором $\psi = \psi_1 + \psi_2$ који припада 2-дим простору, директном збиру тих потпростора. Вектори су комплексне функције аргумената које углавном можемо бирати произвољно, али се у овом случају обично узима x - удаљеност тачке од средишта екрана. Комплексна функција ψ тада мери комплексну вероватноћу појаве честице на удаљености x од центра екрана, а она одговара збирном интензитету енергија на датим позицијама, као на слици 4.3.

Производ коњуговано комплексних функција $\psi = \psi(x)$ је реална вероватноћа:

$$\Pr(x) = \psi^*(x)\psi(x) = [\psi_1(x) + \psi_2(x)]^*[\psi_1(x) + \psi_2(x)],$$

$$\Pr(x) = \psi_1^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2. \tag{4.19}$$

Када је један од отвора затворен, тада нема неизвесности око проласка кроз отворе, па из претходног, редом за $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0$, добијамо:

$$\Pr{}_1(x) = \psi_2^*\psi_2, \quad \Pr{}_2(x) = \psi_1^*\psi_1, \tag{4.20}$$

где смо узели да је први односно други отвор затворен. Вероватноће за оба отвора и за само један од њих отворен су различите функције, па и њихове реализације временом постају видљиво различите, а отуда разлике на екранима. Када би само први отвор био затворен, а затим само други, укупна реална вероватноћа била би

$$\Pr{}_3(x) = \psi_2^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_2, \tag{4.21}$$

[15] Мислим да данашња физика још није открила ту могућност.
[16] Израз „комплексна вероватноћа“ је измишљен у овој књизи.

збир вероватноћа независних случајних догађаја, а то опет није $\Pr(x)$ из (4.19).

У описаној репрезентацији векторских простора радимо са стационарним, ванвременским стањима, па за резултат (4.19) уопште није битно када честице крећу од извора ка екрану. То је оно што нас данас збуњује у квантној механици. Пуштајући једну по једну честицу, сваку следећу након извесног интервала времена, оне пролазе кроз два отвора коначно правећи увек исту шару на екрану у складу са формулом (4.19). Свака од честица интерферира са осталима буквално не марећи за наше схватање поретка прошлост-садашњост-будућност.

Друго што нас данас збуњује настаје из чињенице да је ψ функција вероватноће дефинисана неизвесношћу-информацијом L. Борнова вероватноћа $\Pr = \psi^*\psi = |\psi|^2$ није нешто што се може посматрати одвојено од L, па да рецимо триком извучемо информацију а при томе не изазовемо промене на вероватноћи. За ову интерпретацију и према томе за наведене резултате, свако добијање информације о проласку честице кроз поједини од отвора еквивалентан је. Свеједно је да ли ћемо просто затворити један од отвора, или ћемо ту иформацију добити лукавије.

Слични збуњујући феномени догађају се са сваком честицом стално око нас, само што ми то нисмо могли или нисмо хтели да приметимо. На пример, размотримо фотон који је напустио електрон (догађај A), а који због тога може сићи са више на нижу љуску атома (догађај B). Ако тај фотон никада не доспе до друге честице да са њом размени информацију (кажемо ступи у интеракцију), онда електрон никада неће сићи на нижу љуску. Тада нидге у прошлости датог фотона нема догађаја A нити је он узрок догађаја B. Сви закони одржања су очувани и нигде није нарушен било који закон физике. Фотон остаје виртуелан. Међутим, ако фотон након напуштања електрона размени информацију са неком другом честицом (догађај C), већ самим чином размене (комуникације) он се идентификовао, после чега више нема повратка на његово претходно стање потпуне неизвесности (анонимности), због чега се он разоткрива на начин да се у његовој прошлости појављују догађаји A и B. За електрон и поменуту честицу, као и за све остале честице за које су те две реалне, фотон постаје реалан.

Рећи ћемо да је *виртуелна* она честица која би могла имати али нема довољно интеракција да би постала реална[17]. То је већ помињано у секцији (1.9). Овде нагласимо да важи и обрнуто, свака реална честица би могла бити виртуелна када би имала мањак интеракција. Интеракција честицу разоткрива у односу на њену околину, уопште на прошлост, садашњост и будућност те околине чинећи честицу реалном. То је чин размене информација, који је сам по себи информација.

Како за информацију (неизвесност плус информацију) важи закон одржања, она објављена остаје. Међутим, да би информација била објављена мора бити потврђена и на извору и на пријемнику. Док год има само једну од ове две потврде, честица је виртуелна, да би тек са обе постала реална. Фантастична ствар ове „васионе хаоса“ је управо у томе што материја има три врсте облика: непостојећи, виртуелан и реалан. Ти облици прелазе један у други држећи се закона одржања, осталих закона физике, закона теорије вероватноће и осталих закона математике. Зато је тежак проблем да се овакво гледање на виртуелне честице оспори.

Ово објашњење изгледа скоро као званично, али оно то није. Мале разлике у делу две теорије нису гаранција њиховог већег неслагања, нити неконтрадикторности неке од њих. Међутим, за разлику од интерпретација, не постоје градације тачног[18].

[17] То није савремена дефиниција виртуелне честице.

[18] Свака поливалентна логика се може свести на бинарну.

4.4 Линеарни оператори

За неки оператор $\tilde{A}$ кажемо да је *линеаран* ако за сваки пар функција f, g и скалар λ важи:

$$\tilde{A}(f+g) = \tilde{A}(f) + \tilde{A}(g), \quad \tilde{A}(\lambda f) = \lambda \tilde{A}(f). \tag{4.22}$$

То је општа дефиниција која важи и у случају векторских простора.

Дефиниција 4.4.1. *Нека су X и Y векторски простори над телом Φ. Оператор $\hat{A}: X \to Y$ називамо линеарним оператором ако је $\hat{A}$ дефинисано на X и вреди*

$$\hat{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \hat{A}(x_1) + \alpha_2 \hat{A}(x_2), \tag{4.23}$$

за све $x_1, x_2 \in X$ и све $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$.

За операторе у наставку текста подразумеваћемо да су линеарни (нагласићемо другачије) и ради једноставности уместо $\tilde{A}(x)$ писаћемо $\tilde{A}x$ па и Ax, осим када би то довело до забуне. То поготово јер је на пример број (рецимо 5) линеарни оператор, што следи из $5(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 5 x_1 + \alpha_2 5 x_2$. Линеарни оператор је и диференцирање (по t), јер је $\partial_t(\alpha x + \beta y) = \alpha \partial_t x + \beta \partial_t y$ за свако $x, y \in X$ и свако $\alpha, \beta \in \Phi$.

Пример 4.4.2. *Показати да је оператор $\hat{R}_\varphi$ ротације система (2.45) линеаран.*

Решење. Полазећи од (2.45) израчунавамо редом:

$$\hat{R}_\varphi(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \left[a\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} au_x + bv_x \\ au_y + bv_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (au_x + bv_x)\cos\varphi - (au_y + bv_y)\sin\varphi \\ (au_x + bv_x)\sin\varphi + (au_y + bv_y)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} au_x\cos\varphi - au_x\sin\varphi \\ au_y\sin\varphi + au_y\cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} av_x\cos\varphi - av_x\sin\varphi \\ av_y\sin\varphi + av_y\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}_\varphi(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\hat{R}_\varphi\mathbf{u} + b\hat{R}_\varphi\mathbf{v}, \tag{4.24}$$

за све скаларе a, b и све векторе $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ дате равни. □

Теорема 4.4.3. *Нека је $e_1, \dots, e_n$ база у простору X. Ако су $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ два линеарна оператора са X на простор Y и $\tilde{A}e_k = \tilde{B}e_k$ за све $k = 1, \dots, n$, онда је $\tilde{A} = \tilde{B}$.*

За произвољне векторе $v_1, \dots, v_n$ из Y постоји један и само један линеарни оператор $\tilde{A}$ са X у Y такав да је $v_k = \tilde{A}e_k$ за све $k = 1, \dots, n$.

Доказ. Први део теореме је очигледан, јер је:

$$\tilde{A}x = \tilde{A}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{A}e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{B}e_k = \tilde{B}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \tilde{B}x.$$

За доказ другог дела, нека је $\tilde{A}$ оператор који вектор $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ пресликава у вектор $\tilde{A}x = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$. Тада он вектор

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k + \beta \sum_{k=1} \mu_k e_k = \sum_{k=1} (\alpha\lambda_k + \beta\mu_k) e_k$$

пресликава у вектор

$$\tilde{A}(\alpha x + \beta y) = \sum_{k=1}^n (\alpha\lambda_k + \beta\mu_k) v_k = \alpha \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k + \beta \sum_{k=1}^n \mu_k v_k = \alpha\tilde{A}x + \beta\tilde{A}y.$$

Овако дефинисан оператор је линеаран и $\tilde{A}e_k = v_k$, па је егзистенција тог оператора доказана, а једнозначност следи из првог дела теореме. □

Тиме је доказана и егзистенција линеарних оператора са X на Y. Линеарне комбинације базних векториа $e_1, \dots, e_n$ простора X дефинишу све остале векторе тог простора, укључујући и сваку другу базу тог простора. Нека су вектори e'_k дефинисани системом линарних једначина:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n, \\ e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n, \\ \dots, \\ e'_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n, \end{cases} \tag{4.25}$$

где су сви коефицијенти $a_{ij} \in \Phi$ константе. Детерминанта овог система је број

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.26}$$

који дефинише облик решења линеарног система једначина. Када је $D \ne 0$, тада је дати систем *регуларан* и има само једно решење. Низови вектора e_k и e'_k се обострано једнозначно дефинишу. Они оба представљају (различите) базе истог простора X. Можемо рећи да систем једначина трансформише базу (e_k) у базу (e'_k) и то писати матрично:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

односно кратко

$$\hat{e}' = \hat{A}\hat{e}, \tag{4.28}$$

Када даље, базу (e'_k) линеарним системом сличним (4.25) трансформишемо у трећу базу (e''_k), имаћемо:

$$e''_k = \sum_{j=1}^n b_{kj} e'_j = \sum_{j=1}^n b_{kj} \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} e_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{kj} a_{ji} e_i,$$

што можемо писати:

$$e''_k = \sum_{ki}^n c_{ki} e_i, \quad c_{ki} = \sum_{j=1}^n b_{kj} a_{ji}, \tag{4.29}$$

односно матрично $\hat{C} = \hat{B}\hat{A}$, чиме је дефинисано и матрично множење.

На начин као у примеру 4.4.2 може се показати да је множење вектора матрицом линеарни оператор који тај вектор трансформише у други. Лако се доказује да је производ матрица (када је могућ) такође линеарни оператор, који се може разумети као композиција пресликавања. Оригинали и слике су при таквим пресликавањима изоморфне (в. даље). Множење матрица је асоцијативно али није комутативно.

У случају да је детерминанта (4.26) нула, $D = 0$ а бар један од вектора e'_k није нула, тада из линеарне алгебре знамо да систем (4.25) нема решења, што би овде значило контрадикцију са претходним теоремама. Нема довољно вектора (e'_k) да би се добили вектори (e_k), односно простори које разапињу ти вектори нису једнаке димензије. У случају да је наведена детерминанта нула, $D = 0$ а сви вектори e'_k су нуле, тада систем (4.25) има тривијално решење $e_1 = \dots = e_n = 0$. Међутим, тада постоји и *кренел* или језгро[19], који се назива и нулти простор оператора $\hat{A}$, дефинисан са

$$\ker(\hat{A}) = \{\hat{e} : \hat{e} \in X, \hat{A}\hat{e} = 0\}, \tag{4.30}$$

који је такође линеаран оператор.

Са теоремом 4.4.3 и оператори квантне механике добијају дубљи смисао. Ако два оператора једнако дјелују они су једнаки, а са друге стране могуће је обострано једнозначно пресликавање са апстрактног на конкретно. Једноставан пример тога је оператор положаја $\tilde{x}$. Слично важи и за други основни оператор квантне механике, оператор импулса $\tilde{p} = -i\hbar\nabla$, који је такође је линеаран. Набла оператор (2.80), односно градијент (2.213) увек показује смер највећег пораста функције на коју делује, па оператор импулса који делује на вероватноће показује највероватнији смер. Дакле, у правоуглим Декартовим координатама, резултат деловања тог оператора на таласну функцију $\psi = \psi(x, y, z)$, коју овде називамо комплексном вероватноћом, је вектор

$$\tilde{p}\psi = -i\hbar\nabla\psi = -i\hbar(\partial_x + \partial_y + \partial_z)\psi, \tag{4.31}$$

који показује правац и смер највероватнијег (комплексног, случајног) квантног стања. Употреба оператора $\tilde{p}$ као физичког импулса у складу је са: 1. принципом вероватноће и 2. изоморфизмом.

1. Квантни систем (честица) се креће увек ка највероватнијем могућем стању. То признајемо прихватајући (4.31) за импулс. Тамо где честица не скреће тамо су за њу мање вероватна стања. На путањи честице су за њу максималне ентропије, ван тог пута оне су релативно мање. Како у микро тако и у макро-свету. Тело у инерцијалном систему мирује или се креће једнолико праволинијски, јер би свако друго кретање за њега било прелажење у мање вероватно стање. Тело се креће по геодезицима гравитационог поља, јер су за њега то путање највероватнијих стања. Као што је и очекивано, ово је потврда хипотеза са почетка књиге.

2. Свака (алгебарска) тврдња о простору X приликом изоморфизма прелази у одговарајућу тврдњу о простору Y. Иначе, за два векторска простора X и Y над истим телом Φ кажемо да су изоморфни ако постоји бијекција[20] $B : X \to Y$, звана *изоморфизам*, са својством да је

$$B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y) = \alpha_1 B(x_1) + \alpha_2 B(x_2), \tag{4.32}$$

[19] енг. kernel - језгро

[20] бијекција - има инверзну функцију

за свако $x_1, x_2 \in X$ и за свако $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$.

Приметимо да је изоморфизам линеарно пресликавање, те да набла оператор (4.31) доводи до изоморфизма апстрактног простора комплексних вероватноћа ψ и физичког, материјалног. Тиме правдамо давање физичких својстава (неизвесности) имагинарним вредностима вероватноће или информације. Посебно, узајамно коњуговани простори вектора ψ и ψ^* су изоморфни. Потсетимо се још неколико особина изоморфизама, јер се оне лако преводе на особине линеарних оператора.

Из $B(0) = B(0+0) = B(0) + B(0)$ следи да B преводи нулу у нулу, а зато што је бијекција из $B(x) = 0$ следи $x = 0$. Затим, ако су $e_1, \dots, e_n$ линеарно независни вектори у X онда су $B(e_1), \dots, B(e_n)$ линеарно независни у Y, јер из $\sum \alpha_k B(e_k) = 0$ следи $B(\sum \alpha_k e_k) = 0$, а отуда $\sum \alpha_k e_k = 0$, што повлачи $\alpha_k = 0$ за свако k. Дакле, ако је X коначно димензионалан простор, такав је и Y, и $\dim X = \dim Y$. Изоморфизам је *релација еквиваленције*, јер је рефлексиван, симетричан и транзитиван, редом:

R. X је изоморфно са X;

S. ако је X изоморфно са Y онда је и Y изоморфно са X;

T. ако је X изоморфно са Y и Y изоморфно са Z, онда је X изоморфно са Z.

Следе упуте читаоцу, за доказе еквиваленције, истим редом.

Рефлексивност је очигледна, јер је идентитет $X \to X$ такође изоморфизам. Симетрија следи из бијекције изоморфизма. Транзитивност из композиције пресликавања:

$$B_1(B_2(\alpha x + \beta y)) = B_1(\alpha B_2(x) + \beta B_2(y)) = \alpha B_1(B_2(x)) + \beta B_1(B_2(y)). \tag{4.33}$$

Отуда следећа теорема.

Теорема 4.4.4. *Свака два n-димензионална простора X^n и Y^n међусобно су изоморфна.*

Другим речима, димензија n одређује (карактерише) векторски простор с тачношћу до изоморфизма. То објашњава ону „чудну“ сличност материје, простора и времена. Зато што природа тежи стањима веће слободе (принцип ентропије), сведоци смо сталне производње информације. Тако настаје наша садашњост и време. Међутим, заједно са временом, из момента у моменат настају и простор и материја које су „чудно“ стално нове репродукције старих правила игре. Та правила игре су закони реалне природе, прошлости и садашњости, који су изоморфни „онострaним“ законима још увек нереализоване неизвесности.

Због велике сличности резултата овде нам могу лако промаћи велике разлике у старом и новом тумачењу узрока. Демонстрираћу то на примеру оператора (4.31) и добро познатог Комптоновог[21] ефекта.

Сматра се да је Комптон својим експериментом 1923. године дао најубедљивију потврду честичне природе радијације. Расипајући X-зраке слободних фотона, он је открио да су таласне дужине λ' расуте радијације веће од таласне дужине λ упадне радијације, приказане на слици 4.4. Научна заједница је мишљења да се то може објаснити само претпоставком да се X-зраке фотона понашају као честице.

Упадни фотон (γ) долази са леве стране на датој слици, са енергијом $E_\gamma = h\nu$ и импулсом $\vec{p}_\gamma = h\nu/c$. Он се судара са електроном (e^-) који до тада мирује (са импулсом $\vec{p}_e = 0$). Након судара, фотон скреће за угао θ и одлази са импулсом $\vec{p}'_\gamma = h\nu'/c$, док се електрон одбија (у правцу стрелице) са импулсом $\vec{p}'_e$.

Из закона одржања енергије и импулса следи, редом:

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e, \quad \vec{p}_\gamma + \vec{p}_e = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}'_e,$$

[21] Arthur Compton (1892-1962), амерички физичар.

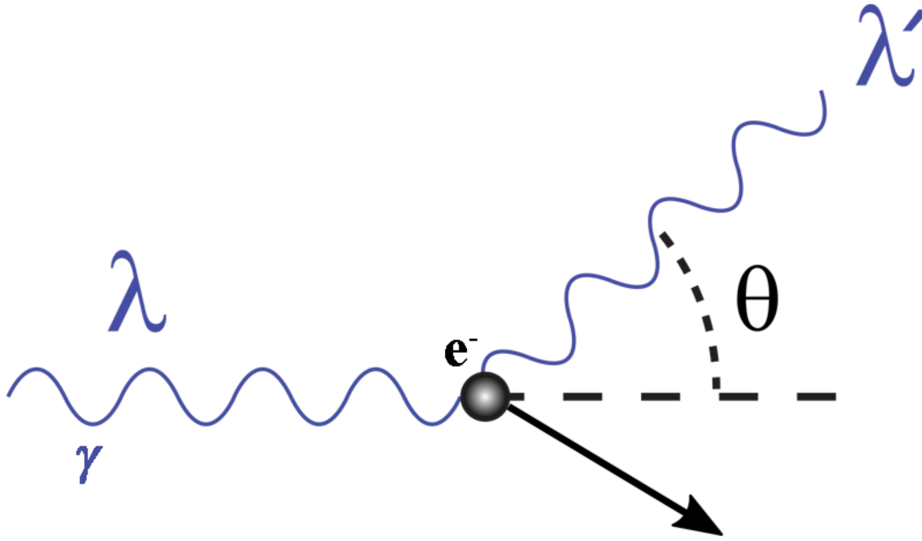
$$\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \sqrt{(p_e' c)^2 + (m_e c^2)^2}, \quad p_e'^2 = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' \cos\theta,$$

$$\begin{cases} (p_e' c)^2 = (\frac{hc}{\lambda})^2 + (\frac{hc}{\lambda'})^2 + (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'})2hcm_e c^2 - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'}, \\ (p_e' c)^2 = (\frac{hc}{\lambda})^2 + (\frac{hc}{\lambda'})^2 - \frac{2h^2c^2\cos\theta}{\lambda\lambda'}. \end{cases}$$

Упоређивањем два добијена резултата налазимо

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta), \tag{4.34}$$

а то је промена таласне дужине расутог фотона у односу на упадну. Она се назива Комптонова промена.



Slika 4.4: Комптонов ефекат.

Када је $\theta = 0$, тада је $\Delta\lambda = 0$, што значи да нема промене таласне дужине фотона и нема промене енергије фотона, па није било судара нити електрона на тој путањи. Када је $\theta = 180°$, тада се долазећи фотон рефлектује назад, промена таласне дужине је максимална и њој одговара максимална енергија коју електрон може стећи таквим сударом.

Какве везе има описани Комптонов ефекат са принципом вероватноће? Импулс фотона, изоморфан (4.31), иде смером највећих вероватноћа. Како је вероватноћа налажења фотона на датом месту већа када је његова таласна дужина краћа, то и прелазак на мање вероватна стања фотона прати повећање његове таласне дужине. Та промена на путању (релативно) мање вероватних стања праћена је сударом или дејством неке силе, јер је промена хода по путањи највећих вероватноћа могућа само на тај не-спонтани начин.

Према принципу ентропије, фотон и електрон се одбијају јер између њих настаје простор смањене ентропије (4.1). Чињеница да се фотон и електрон сударају и одбијају значи да они могу комуницирати. Разменом информације, простор који је преноси (привремено) губи на неизвесности чиме губи део ентропије. Најповољнија ентропија, логаритам броја распореда W_0 најповољнијег распоређивања, на правцу комуникације између честица постаје мања, те обе скрећу ка простору веће ентропије.

4.5 Унитарни простори

Унитарни простор је векторски простор X над телом $\Phi = \mathbb{C}$ са дефинисаним *скаларним производом* (који називамо и „унутрашњи производ“ или „тачка производ“) вектора $v_1, v_2 \in X$, означен са $\langle v_1, v_2\rangle \in \mathbb{C}$, са следећим особинама[22]:

1. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_2, v_1\rangle^*$ - хермитско коњуговање;
2. $\langle v_1, \lambda v_2\rangle = \lambda\langle v_1, v_2\rangle$, за све $\lambda \in \mathbb{C}$;
3. $\langle v, v_1 + v_2\rangle = \langle v, v_1\rangle + \langle v, v_2\rangle$, за све $v \in X$;
4. ако $v \neq 0$ тада $\langle v, v\rangle > 0$.

Унитарни простор не мора бити коначне димензије. Аналогно еуклидском, у унитарном простору се може дефинисати ортогоналност $v_1 \perp v_2$ са $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, а затим се може дефинисати и ортонормиран систем вектора. У коначно димензионалном случају увек постоји ортонормирана база. Унитарни векторски простор се нормира са

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}, \tag{4.35}$$

јер функција $u \to \sqrt{\langle u, u\rangle}$ испуњава све услове дефиниције 4.2.1.

У даљем тексту са горњим индексом звездицом означавамо коњуговање, како броја тако и матрице или оператора. Комплексном броју $z = x + iy$ са реалним бројевима x и y, коњугован је $z^* = x - iy$. Комплексној матрици $\hat{A} = (z_{jk})$ коњугована је транспонована са коњугованим коефицијентима $\hat{A}^* = (z^*_{kj})$, дакле као што је наведено у (3.129). Такво коњуговање матрице се често назива хермитско и означава и са $\hat{A}^\dagger$.

Пример 4.5.1. *Показати да за скаларни производ вектора из X над $\mathbb{C}$ важи:*
i. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda^*\langle u, v\rangle$;
ii. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;
iii. $|\langle u, v\rangle|^2 \le \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$;
за све $u, v, w \in X$ и сваки $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказ. Тврђења 1. и 2. лако доказујемо. Тврђење 3. је Кошијева неједнакост (4.5). □

Када је $\Phi = \mathbb{R}$, тада радимо са реалним векторским простором када коњуговање не мења вредности компоненти вектора. У складу са нашим хипотезама, реални векторски простори имају предност у ситуацијама мањег значаја неизвесности. То је углавном макро-свет због доминације закона великих бројева, али то су и нека апстрахована места случајних догађаја.

У правоуглом Декартовим систему $Oxyz$ векторе представљамо са оријентисаним дужима од исходишта до дате тачке, рецимо:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z,$$

где су $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ јединични вектори (ортови) апсцисе, ординате и апликате. Тада:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi, \tag{4.36}$$

где је $\varphi = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ угао између вектора, а $|\mathbf{a}|$ и $|\mathbf{b}|$ су њихови интензитети. Посебно је

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{4.37}$$

[22] Особине су мало подешене према квантној механици.

интензитет вектора **a**. За разлику од уобичајене примене на веома познате ствари, покушајмо сада овом скаларном производу прићи са једне необичне стране. То су, наравно, хипотезе у хипотези.

У књизи „Информација перцепције“, в. [1], ради анализе друштвених система и колонија живих бића уведена је формула

$$\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}. \tag{4.38}$$

Слобода ℓ просечне јединке дате групе једнака је скаларном производу вектора **i** њене интелигенције и хијерархије **h** њеног окружења. Реалан број ℓ је количина могућности перцепција помоћу чула и других начина опажања јединке, па је то информација која поопштава Шенонову[23]. Као што знамо, Шенонова информација је средња вредност (математичко очекивање) Хартлијевих:

$$I = P_1 I_1 + P_2 I_2 + \dots + P_n I_n, \tag{4.39}$$

где је P_k расподела вероватноћа (збир свих P_k је један), а I_k су Хартлијеве информације (1.1) појединих догађаја. Погледајмо сада да (4.38) можемо схватити и као поопштење Лагранжове функције дејства L.

Вероватноћа P_k је реалан број од нуле до јединице, придружен k-том случајном догађају. Нули одговара немогућ, јединици сигуран догађај. Што је тај број већи, веће су и шансе да се дати догађај реализује, а то је суштина принципа вероватноће. Са друге стране, Хартлијева информација, $I_k = -\ln P_k$, је позитиван реалан број од нула до бесконачно, који је утолико већи што је вероватноћа P_k мања. Дакле, већој вероватноћи одговара мања информација, као и мање дејство[24]. Такође, принципи вероватноће и дејства су једнако универзални.

Вероватноћа, информација и дејство се добро прате и у другим примерима. Када је више случајних догађаја, више је могућности, па је већа информација у одабиру једне од њих и насупрот томе мања је вероватноћа. У Шеноновој формули (4.39) са просечном већом информацијом иду мање поједине вероватноће и обрнуто. У још сложенијој ситуацији, када користимо формулу (4.38), мање слободна јединка је она која има мање опција, чије понашање је предвидљивије. Тада такође можемо рећи да у њеном понашању има мање колебања.

Из претходног призилази да би принцип најмањег дејства о којем сада говоримо могао бити онај исти Лагранжијан $\mathcal{L}$ који је одавно познат физици и који смо овде више пута помињали. Тада би одједном много тога постало јасније. Дејство (2.31) је Лагранжијан $\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ специјалне теорије релативности, увек негативан број, утолико мањи што је брзина већа, тако да је у мировању најмањи. Приметили смо, када је Лагранжијан најмањи, информација је најмања а вероватноћа највећа. Према томе, Лагранжијан специјалне теорије релативности је у складу са принципом вероватноће и посебно са нашом основном претпоставком да тамо где време спорије пролази има мање информације и више вероватноће.

Лагранжова функција $\mathcal{L}$ се дефинише и као разлика кинетичке E_k и потенцијалне E_p енергије датог тела. Опет, тело у мировању у гравитационом пољу има негативан број $\mathcal{L} = E_k - E_p$, утолико већи што је гравитациона сила слабија, а највећи када те силе уопште нема. Тело је у стању најмање информације а највеће вероватноће када

[23] Claude Shannon (1916-2001), амерички математичар и електро-инжењер.

[24] Зато инсистирам на разликовању ентропије од информације.

је у инерцијалном кретању у гравитационом пољу, тј. у слободном паду. Оно не може спонтано да се заустави јер би тада прешло у стање мање вероватноће и стање мање ентропије (1.12) и из истог разлога не може да пређе у суседно стање слободног пада (по другој путањи).

Следећа основна и такође добро позната особина дејства, Лагранжове функције $\mathcal{L}$, јесте да оно има физичку димензију производа импулса и положаја, односно производа енергије и времена. Оно је скаларни производ 4-вектора импулса и вектора догађаја у простор-времену Минковског. Зато не изненађује да за поопштену информацију овде узимамо

$$L = -\ln\psi, \tag{4.40}$$

где је ψ поопштена (комплексна) вероватноћа, чији коњуговано комплексни производи дају реалну вероватноћу $|\psi|^2 = \psi^*\psi$.

Као што видимо, ово је у складу са квантном механиком, а са друге стране обећава и склад са са формулом (4.38) односно њеним поопштењем и на неживи свет. При томе, Лагранжијан интерпретирамо као слободу ℓ. Како је та слобода израз присутних могућности, за очекивати је да тамо где доминирају случајности буде увек $\ell \neq 0$, па према томе да оба вектора: 1. интелигенције $\mathbf{i}$ и 2. хијерархије $\mathbf{h}$, нису нуле.

1. Да интелигенција честице (рецимо електрона) није нула јесте чудно, али није неприхватљиво. Наиме, ако верујемо да су нам све особине које имамо дошле из материје из које смо грађени, онда ћемо лако прихватити и да неке најситније честице морају имати сваку од тих особина макар у малим порцијама. Штавише, за сваку честицу биће $\mathbf{i} \neq 0$, када под њеном „интелигенцијом“ подразумевамо њену способност „бирања“, на начин реализације случајности.

2. Према Ремзијевој[25] теореми 1930, нулта хијерархија је немогућа. То је једна од последица Дирихлеовог[26] принципа, да у случају када пакујемо више куглица у мање кутија бар у некој од кутија мора бити више од једне куглице. Не доказујем, само парафразирам. Ма колико се трудили да напишемо књигу бесмислених речи, увек је могуће дуж неке вертикале или хоризонтале текста пронаћи унапред дати израз, само ако је књига довољно велика. Ма како се насумично груписали облаци на небу, они ће пре или касније формирати неки нама од раније познат лик. Отуда $\mathbf{h} \neq 0$.

Ако је $\Phi = \mathbb{C}$, тада радимо са комплексним векторским простором када коњуговање мења вредност вектора. Еуклидски простор са комплексним коефицијентима, са произвољним па и бесконачним бројем димензија, са структуром која дозвољава дефинисање скаларног производа и који је комплетан (постоје потребне граничне вредности), назива се Хилбертов[27]. Хилбертови простори су основа квантне механике.

У Хилбертовом простору, Декартов систем $Oxyz$ има комплексне коефицијенте, па „оријентисане дужи“ $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ уместо (4.36) дају

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = a_x^* b_x + a_y^* b_y + a_z^* b_z. \tag{4.41}$$

Према овој дефиницији, интензитет вектора је

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle} = \sqrt{a_x^* a_x + a_y^* a_y + a_z^* a_z}, \tag{4.42}$$

односно $||\mathbf{a}||^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2$. Лако је проверити да овакво множење заиста испуњава услове скаларног производа. Векторе са комплексним коефицијентима разликујемо од самих комплексних бројева, али има великих сличности.

[25]Frank P. Ramsey (1903-1930), британски филозоф, математичар и економист.
[26]Peter Gustav Dirichlet (1805-1859), немачки математичар.
[27]David Hilbert (1862-1943), немачки математичар.

Према теореми 3.1.4, за комплексне бројеве $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ скаларни производ $z = z_1^* z_2$ је сваки од следећих:

$$\begin{cases} 1. & z = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1), \\ 2. & z = \Re(z) + i\Im(z), \\ 3. & z = |z_1||z_2|\cos\beta + i|z_1||z_2|\sin\beta, \\ 4. & z = \rho e^{i\beta}, \end{cases} \tag{4.43}$$

где је $\Re(z)$ реални део броја z, $\Im(z)$ имагинарни део, $\beta = \angle(z_1Oz_2)$ је угао између датих бројева, а модул производа је $\rho = |z| = |z_1||z_2|$. Према томе је $z_1^*z_2$ једнако $z_2^*z_1$ ако и само ако су тачке O, z_1 и z_2 колинеарне, односно $(\exists\alpha\in\mathbb{R})\ z_2 = \alpha z_1$. Иако је уобичајено множење комплексних бројева комутативно ($z_1z_2 = z_2z_1$), њихово скаларно множење није ($z_1^*z_2 \ne z_2^*z_1$). Скаларни производ у Хилбертовом простору у општем случају није комутативан.

Зато разликујемо вектор колону од њему коњугованог вектора ретка. Први је матрица типа 3×1, други је матрица типа 1×3, па за (4.41) имамо:

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x^* & a_y^* & a_z^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x^*b_x + a_y^*b_y + a_z^*b_z, \tag{4.44}$$

док је

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x^* & b_y^* & b_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_xb_x^* & a_xb_y^* & a_xb_z^* \\ a_yb_x^* & a_yb_y^* & a_yb_z^* \\ a_zb_x^* & a_zb_y^* & a_zb_z^* \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Први производ (4.44) је скалар, други (4.45) је матрица типа 3×3. Из овог примера видимо и зашто је $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^* = \langle\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle$.

Пример 4.5.2. *Показати да се из дефиниције (4.41) може добити:*

$$\Re\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\varphi, \quad \Im\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\varphi, \tag{4.46}$$

где је φ „угао“ између датих вектора.

Решење. Врхови датих вектора су тачке $A(a_x,a_y,a_z)$ и $B(b_x,b_y,b_z)$ са комплексним координатама, а исходиште система је тачка $O(0,0,0)$. Према косинусној теореми за троугао OAB имамо

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\varphi,$$

$$\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\varphi,$$

$$(a_x^*b_x + a_xb_x^*) + (a_y^*b_y + a_yb_y^*) + (a_z^*b_z + a_zb_z^*) = 2\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\varphi,$$

$$\Re(a_x^*b_x) + \Re(a_y^*b_y) + \Re(a_z^*b_z) = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\varphi,$$

$$\Re(a_x^*b_x + a_y^*b_y + a_z^*b_z) = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\varphi,$$

а отуда прва тражена једнакост.

Компонента $\xi\in\{x,y,z\}$ вектора $\mathbf{v}\in\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ је $v_\xi = v_{\xi1} + iv_{\xi2}$. Тако:

$$\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi = 1-\left(\frac{\Re\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}\right)^2 = \frac{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\Re\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle)^2}{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2},$$

$$\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\varphi = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\Re\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle)^2$$
$$= \sum_\xi (a_{\xi1}^2 + a_{\xi2}^2)\sum_\xi (b_{\xi1}^2 + b_{\xi2}^2) - \sum_\xi (a_{\xi1}b_{\xi1} + a_{\xi2}b_{\xi2})^2$$
$$= \sum_\xi [(a_{\xi1}^2 b_{\xi1}^2 + a_{\xi1}^2 b_{\xi2}^2 + a_{\xi2}^2 b_{\xi1}^2 + a_{\xi2}^2 b_{\xi2}^2) - (a_{\xi1}^2 b_{\xi1}^2 + 2a_{\xi1}b_{\xi1}a_{\xi2}b_{\xi2} + a_{\xi2}^2 b_{\xi2}^2)]$$
$$= \sum_\xi (a_{\xi1}^2 b_{\xi2}^2 + a_{\xi2}^2 b_{\xi1}^2 - 2a_{\xi1}b_{\xi1}a_{\xi2}b_{\xi2}) = \sum_\xi (a_{\xi1}b_{\xi2} - a_{\xi2}b_{\xi1})^2,$$
$$\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\varphi = \sum_\xi (a_{\xi1}b_{\xi2} - a_{\xi2}b_{\xi1})^2,$$

а отуда друга тражена једнакост. □

Наведени пример показује на који начин се комплексна раван може поопштавати ка унитарном простору[28]. Доследно демонстрацији из примера поопштавамо и сваку од једнакости (4.43), добијамо:

$$\begin{cases} 1. & \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \sum_\xi (a_{\xi1}b_{\xi2} + b_{\xi1}b_{\xi2}) + i\sum_\xi (a_{\xi1}b_{\xi2} - a_{\xi2}b_{\xi1}), \\ 2. & \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \Re\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle + i\Im\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle, \\ 3. & \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\varphi + i\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\varphi, \\ 4. & \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \rho e^{i\varphi}, \end{cases} \tag{4.47}$$

где је $\Re\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$ реални део скаларног производа, $\Im\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$ имагинарни део, $\varphi = \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$ је поопштени угао између датих вектора, а модул производа је $\rho = |\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$.

У простору X^n над $\mathbb{C}$ скаларни производ вектора $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_n)$ са компононтама $x_k = x_{k1} + ix_{k2}$ и $y_k = y_{k1} + iy_{k2}$, за $k = 1,2,\dots,n$ и $j = 1,2$ реалним x_{kj}, y_{kj} и позитивним константама $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$, можемо дефинисати и са:

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \alpha_1 x_1^* y_1 + \alpha_2 x_2^* y_2 + \dots + \alpha_n x_n^* y_n \tag{4.48}$$
$$= \sum_k \alpha_k (x_{k1} - ix_{k2})(y_{k1} + iy_{k2})$$
$$= \sum_k [\alpha_k(x_{k1}y_{k1} + x_{k2}y_{k2}) + i\alpha_k(x_{k1}y_{k2} - x_{k2}y_{k1})]$$
$$= \sum_k \alpha_k(x_{k1}y_{k1} + x_{k2}y_{k2}) + i\sum_k \alpha_k(x_{k1}y_{k2} - x_{k2}y_{k1})$$
$$= \Re\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + i\Im\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle.$$

Интензитет вектора је $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$, па добијамо:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \Re\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + i\Im\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \Re\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \tag{4.49}$$
$$= \sum \alpha_k(x_{k1}^2 + x_{k2}^2) = \sqrt{\alpha_1|x_1|^2 + \alpha_2|x_2|^2 + \dots + \alpha_n|x_n|^2}.$$

Угао φ између два вектора опет се може дефинисати помоћу три тачке O, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, и са наведеним интензитетима дефинисати троугао. Затим се добијају једнакости аналогне (4.47). Ако је свако $\alpha_k = 1$ и $n = 3$, овај случај се своди на (4.41).

Када $n \to \infty$, у Хилбертовом простору ови низови и њихови збирови конвергирају. Вектори постају непрекидне функције, а скаларни производи прелазе у одговарајуће интеграле. Особине попут (4.43) остају аналогне, а сличности са еуклидским просторима обећавају. Надамо се да из исте неизвесности настају време, простор и материја.

[28] Обрађујем ово детаљно јер не могу да нешто слично нађем у литератури.

4.6 Базе простора

Видели смо да векторски простори имају базе (теорема 4.3.4) и да било које две базе истог простора имају исти број елемената. Овде ћемо разматрати начине приказивања датог вектора различитим базама и везе међу тим начинима. Видећемо да су оператори за прелазак из једног у други начин приказивања истог вектора такође линеарни. Они на различите начине формирају нове векторске просторе изоморфне са датим.

Када је скуп вектора $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ база векторског простора X над телом Φ, тада се сваки вектор $x \in X$ може написати у облику $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$ где су $\xi_k \in \Phi$ скалари. Ти скалари су координате вектора x, једнозначно одређене датим вектором, које образују матрицу

$$\hat{x}(e) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \tag{4.50}$$

Ово је вектор координата ξ_k који означавамо и са $\hat{\xi} = \hat{x}(e)$ и третирамо као контраваријантни тензор. Ипак, не користимо тензорско писање индекса. Придруживање $x \to \hat{\xi}$ је изоморфизам простора X и простора $\hat{\Xi}$ матрица колона са елементима из Φ.

Узмемо ли неку другу базу $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ истом ће вектору у том простору припадати неке друге координате $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, тако да је

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k = \sum_{k=1}^n \xi'_k e'_k. \tag{4.51}$$

То пишемо матрично $x = \hat{e}\hat{\xi} = \hat{e}'\hat{\xi}'$, или детаљније:

$$x = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

а то значи да су вектори базе коваријантни, што знамо и из тензорског рачуна. Два система скалара $\hat{\xi} = \hat{x}(e)$ и $\hat{\xi}' = \hat{x}(e')$ представљају исти вектор, па се поставља питање везе између њих. Те задатке детаљно решавају алгебра и функционална анализа, прва у коначно, друга у бесконачно димензионалним просторима.

Кажемо да линеарни оператор $A : X \to Y$ има *инверзан оператор* $A^{-1} : Y \to X$ ако постоји пресликавање A^{-1} такво да је

$$A^{-1}(Ax) = x, \tag{4.53}$$

за свако $x \in X$. Тада су оба A и A^{-1} бијекције и можемо писати $Y = A(X)$. Приметимо да ова дефиниција обухвата и случај $Y = X$, када оператор пресликава дати простор у самог себе.

Теорема 4.6.1. *Инверзан оператор линеарног оператора је линеаран.*

Доказ. Ако A има A^{-1}, тада поред (4.52) важи и $A(A^{-1}y) = AA^{-1}y = y$, за свако $y \in Y$. За произвољна два вектора $y_1, y_2 \in Y$ и произвољне скаларе $\lambda_1, \lambda_2 \in \Phi$ налазимо:

$$\begin{aligned} A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= A^{-1}(\lambda_1 AA^{-1}y_1 + \lambda_2 AA^{-1}y_2) \\ &= A^{-1}A(\lambda_1 A^{-1}y_1 + \lambda_2 A^{-1}y_2) \\ &= \lambda_1 A^{-1}(y_1) + \lambda_2 A^{-1}(y_2), \end{aligned}$$

а то је и требало доказати. □

Потсетимо се опет система линеарних једначина (4.25), који пресликава векторе базе e у векторе базе e' истог простора X. Аналогно регуларном систему једначина, који има јединствено решење, за оператор кажемо да је *регуларан* ако преводи базу у базу. Нека је A један такав оператор. Тада:

$$e'_k = Ae_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} e_j, \quad k = 1, \dots, n. \tag{4.54}$$

Са друге стране, за $x \in X$ важи:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j = \sum_{k=1}^{n} \xi'_k e'_k = \sum_{k=1}^{n} \xi'_k \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} e_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \xi'_k \alpha_{kj} e_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \sum_{k=1}^{n} \xi'_k \alpha_{kj}) e_j = 0,$$

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \xi'_k, \quad j = 1, \dots, n. \tag{4.55}$$

Доследно ознакама (4.50) пишемо:

$$\hat{x}(e) = \hat{A}(e)\hat{x}(e'), \quad \hat{x}(e') = [\hat{A}(e)]^{-1}\hat{x}(e), \quad x \in X, \tag{4.56}$$

односно $\hat{\xi} = \hat{A}\hat{\xi}'$, када је $\hat{e}' = \hat{e}\hat{A}$. Укратко, координате вектора трансформише инверзни оператор од оног за базе. Базни вектори-матрице су коваријантни (ретци), координатни су контраваријантни (колоне).

Пример 4.6.2. *У простору полинома по t до другог степена, прву базу чине вектори $e_1 = 1$, $e_2 = t$ и $e_3 = t^2$, а другу базу $e'_1 = 1 - t$, $e'_2 = t + t^2$ и $e'_3 = 1 - t^2$. Приказати вектор $x(e) = 4 - 5t + 3t^2$ из прве у другој бази, у бази e'.*

Решење. Из датих услова формирамо једначине за базе ($e' = Ae$):

$$\begin{cases} e'_1 = Ae_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = Ae_2 = e_2 + e_3 \\ e'_3 = Ae_3 = e_1 - e_3, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

чиме су дефинисане матрице трансформације ($\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$):

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \iff \hat{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Дати вектор има координате ($\hat{\xi}' = \hat{A}^{-1}\hat{\xi}$):

$$\hat{\xi} = \hat{x}(e) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\xi}' = \hat{A}^{-1}\hat{\xi} = \hat{x}(e') = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

одакле $x(e') = 6 \cdot (1 - t) + 1 \cdot (t + t^2) - 2 \cdot (1 - t^2)$. □

Ако матрица $\hat{A}$ трансформише базу $\hat{e}$ у $\hat{e}'$, а матрица $\hat{B}$ трансформише базу $\hat{e}'$ у $\hat{e}''$, то (матрично) пишемо $\hat{e}' = \hat{e}\hat{A}$ и $\hat{e}'' = \hat{e}'\hat{B} = \hat{e}\hat{A}\hat{B}$, где због асоцијативности матричног множења нису потребне заграде. Према томе, матрица $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ директно преводи базу $\hat{e}$ у базу $\hat{e}''$. Помоћу (4.52) даље добијамо $\hat{e}\hat{\xi} = \hat{e}''\hat{\xi}''$, $\hat{e}'\hat{\xi}'' = \hat{e}'\hat{B}\hat{\xi}'' = \hat{e}\hat{A}\hat{B}\hat{\xi}''$, па

$$\hat{\xi} = \hat{A}\hat{B}\hat{\xi}'', \quad \hat{\xi}'' = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}\hat{\xi}. \tag{4.57}$$

Другу једнакост добијамо из прве множењем слева[29]. Отуда, за инверзне матрице (када оне постоје) важи једнакост

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}, \tag{4.58}$$

а слична важи и за операторе.

Потсетимо се, регуларном називамо матрицу која има инверзну матрицу. Она базу трансформише у базу са једнаким бројем димензија, односно она је матрица регуларног система линеарних једначина (оног који има јединствено решење). Према томе, само квадратне матрице могу бити регуларне, али и такве само онда када им детерминанта није нула.

Једначином $Ae_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}e_j$ за $k = 1,\dots,n$ оператору A придружујемо матрицу $\hat{A}(e) = (\alpha_{kj})$. Колону по колону те матрице чине координате вектора Ae_k у бази e. У бази e' истог простора тако добијамо матрицу $\hat{A}(e')$. Потражимо сада везу између ових матрица које у различитим базама припадају истом оператору A.

Узмимо линеаран оператор A тако да је $e'_k = Te_k$ за $k = 1,\dots,n$. Линеарни израз $y = Dx$ преласком на базу e постаје $\eta_k = \sum_j \alpha_{kj}\xi_j$, или матрично $\hat{y}(e) = \hat{D}(e)\hat{x}(e)$. Иста једначина $y = Dx$ у бази e' постаје $\hat{y}(e') = \hat{D}(e)\hat{x}(e')$, па како је $\hat{z}(e) = \hat{A}(e)\hat{z}(e')$ за сваки вектор $z \in X$, добијамо $\hat{A}(e)\hat{y}(e') = \hat{D}(e)\hat{A}(e)\hat{x}(e')$. Из претходног сада следи $\hat{A}(e)\hat{D}(e') = \hat{D}(e)\hat{A}(e)$, а отуда

$$\hat{D}(e') = [\hat{A}(e)]^{-1}\hat{D}(e)\hat{A}(e), \tag{4.59}$$

што представља матрицу $\hat{D}$ произвољног оператора D у новој бази e', помоћу матрице тога оператора у старој бази e и матрице оператора $\hat{A}$ који стару базу преводи у нову. Аналогна једначина важиће за одговарајуће операторе.

Пример 4.6.3. *Описати деривирање помоћу (4.59), користећи пример 4.6.2.*

Решење. Са D означимо оператор деривирања у датом простору. Тада је

$$D(1,t,t^2) = (0,1,2t),$$

$$De_1 = 0, \quad De_2 = e_1, \quad De_3 = 2e_2,$$

$$D(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где k-та колона представља k-ти базни вектор. Затим:

$$D(e') = [\hat{A}(e)]^{-1}D(e)\hat{A}(e) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

[29] Матрично множење није комутативно

$$D(e') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

За $x(e) = 4 - 5t + 3t^2$ имамо $y = Dx = -5 + 6t$, односно:

$$\hat{y}(e) = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}(e') = \hat{D}(e')\hat{x}(e') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{y}(e') = -\frac{11}{2}(1-t) + \frac{1}{2}(t+t^2) + \frac{1}{2}(1-t^2),$$

што директним сређивањем израза даје исто $y = -5 + 6t$. □

У квантној механици, Дираковом нотацијом „бра-кет“, коваријантне векторе ретке стања ψ означавамо левом заградом $\langle\psi|$, а контраваријантне десном $|\psi\rangle$, тако да је производ редом леве и десне заграде скалар $\langle\psi|\psi\rangle = \psi^*\psi$. Попут (4.45), производ обрнутим редоследом је матрица.

Свака честица има сопствену вредност угловног импулса (ангуларног момента) који називамо *спин* који је константа дате честице. Спин може имати два смера која често означавамо предзнаком „+“ или „-“ и читамо „горе“ или „доле“. Како честица може имати само таква два спина, апстрактни простор њених спинова над телом комплексних бројева има два базна вектора.

Пример 4.6.4. *Два стања спина су вектори $|+\rangle$ и $|-\rangle$ који чине базу. Нека је дат оператор A особинама:*

$$A|+\rangle = \frac{1}{2}i\hbar|-\rangle, \quad A|-\rangle = -\frac{1}{2}i\hbar|+\rangle. \tag{4.60}$$

Наћи матрицу оператора.

Решење. Пишемо матрично:

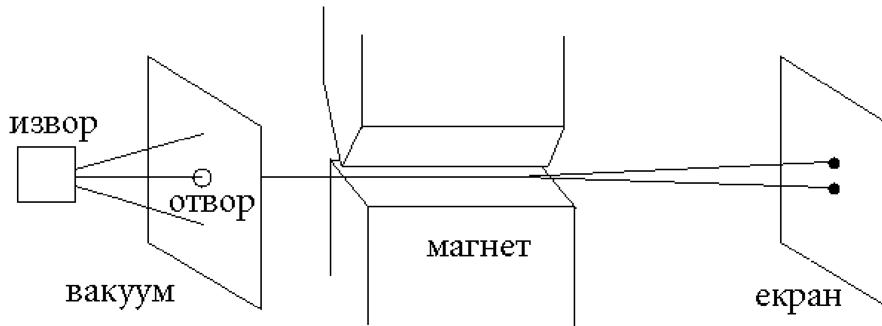
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\hat{A} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\hat{A} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\hat{A} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = -\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_2,$$

где је $\hat{\sigma}_2$ Паулијева матрица (3.3). □

Идеја о спину честица настала је након експеримената Стерна[30] и Герлаха[31] 1922. године, приказаног на слици 4.5. Они су користили атоме сребра (Ag) који имају 47 електрона, од којих 46 формирају сферно симетрично распоређен набој а 47. електрон заузима 5. орбиту. Када је сребро у основном стању, укупни орбитални моменат (угловни импулс) би му требао бити нула ($l = 0$). У том експерименту, зрака атома сребра пролази кроз неједнако магнетно поље оријентације z осе. Према Шредингеровој таласној теорији, ако би атоми имали неки ангуларни моменат l, зрака сребра би се



Slika 4.5: Експеримент Стерна и Герлаха.

требала расцепити, а управо то се и догађа. Исти резултат је потврђен и у случају атома водоника у основном стању ($l = 0$), где се раздвајање не очекује.

Да би решили ову загонетку, Уленбек и Гоудсмит[32] су 1925. године постулирали да поред орбитног угловног момента, електрон има и *унутрашњи* ангуларни моменат, који за разлику од орбитног нема ништа са просторним степенима слободе. По аналогији са кретањем Земље, која има кретање по орбити око Сунца и унутрашњу ротацију или *спин* око своје осе, електрон или свака друга честица имају неку врсту таквог унутрашњег кретања. Додаје се, електрон и сличне мале честице немају унутрашњу структуру, па спин као њихов унутрашњи степен слободе остаје тек апстрактан квантно механички концепт. За разлику од орбитног угловног момента, спин се не може описати помоћу оператора диференцирања.

У складу са објашњењем формуле (4.38) за неживи свет, попут „интелигенције“ електрона, овде би могли покушати разумети и спин електрона. Материја од које смо грађени, овако или онако требала би имати бар у неким траговима (малим квантима) својства која ми имамо. Унутрашња ротација зврка, жироскопа или Земље око своје осе, неће се сама зауставити, кажемо: због закона одржања ротационог импулса. Али чиме објаснити тај закон одржања? Није речено одакле он долази и зашто важи и тамо где понестаје смисла нашем макроскопском схватању окретања. То су наравно спекулације, додатак интуитивном разумевању кванта спин.

Званично данас, спин је квантни број $s = \frac{n}{2}$, где је n цели позитиван број. За честице су дозвољене вредности спина s све редом $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$, при чему оне са полу-целим бројем $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ називамо фермиони, а оне са целим $0, 1, 2, \dots$ бозони. Оне се добијају сабирањем основних вектора спина, попут сабирања вектора обичног (праволинијског) импулса. Може се доказати да за фермионе важи Ферми-Диракова статистика[33] и Паулијев принцип искључења[34], а да за бозоне важи Бозе-Ајнштајнова статистика[35] и да они заузимају „симетрична стања“ због чега се њихови исти квантни бројеви узајамно не искључују. Ова друга статистика повезује квантну механику и специјалну релативност.

[30]Otto Stern (1888-1969), немачки физичар.

[31]Walter Gerlach (1889-1979), немачки физичар.

[32]Uhlenbeck, G.E.; Goudsmith, S. (1925). "Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine, Cambridge University Press. pp. 7–8. ISBN 0-521-83911-4.

[33]Fermi–Dirac statistics: https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi%E2%80%93Dirac_statistics

[34]Pauli exclusion principle:https://en.wikipedia.org/wiki/Pauli_exclusion_principle

[35]Bose–Einstein statistics: https://en.wikipedia.org/wiki/Bose%E2%80%93Einstein_statistics

4.7 Адјунговање

Функционал је функција дефинисана на векторском простору X с вредностима у скупу скалара Φ. Ако функционал преводи линеарни спој вектора у одговарајући спој скалара, онда се он зове *линеарни функционал*, а такве ћемо убудуће подразумевати. Са друге стране, скуп свих линеарних функционала дефинисаних на датом простору с уобичајеним сабирањем и множењем са скаларом постаје векторски простор. Тај простор означавамо са $X^\star$ и зовемо *адјунгован* или *дуалан простор* простора X.

Када је $e_1,\dots,e_n$ база у X, тада се вектор $x \in X$ може писати $x = \sum_k e_k\xi_k$. Отуда, за произвољан функционал $y^\star \in X^\star$, када су познати скалари $\eta_k^\star = y^\star(e_k)$:

$$y^\star(x) = y^\star(\sum_{k=1}^n e_k\xi_k) = \sum_{k=1}^n y^\star(e_k)\xi_k = \sum_{k=1}^n \eta_k^\star\xi_k,$$

$$y^\star(x) = \sum_{k=1}^n \eta_k^\star\xi_k. \tag{4.61}$$

Према томе, деловање линеарног функционала $y^\star$ на произвољан вектор x је потпуно познато, ако је познато његово деловање на базу. То је његов општи облик. Обрнуто, ако су $\eta_k^\star$ дати скалари онда је релацијом (4.61) у бази e_k потпуно и једнозначно дефинисан линеарни функционал $y^\star$ на X. Број $y^\star(x)$ називамо *канонским производом* вектора $y^\star \in X^\star$ и вектора $x \in X$.

Скалари $\eta_k^\star$ су координате коваријантног вектора $\eta^\star$ док су скалари ξ_k координате контраваријантног ξ. Зато је матрица првог редак $\hat\eta$, а другог колона $\hat\xi$ тако да је њихов производ скалар (функционал и коњуговање пишемо слично, $y^\star$ и y^*):

$$y^\star(x) = \hat\eta^\star\hat\xi = \begin{pmatrix}\eta_1^\star & \dots & \eta_n^\star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix} = \eta_1^\star\xi_1 + \dots + \eta_n^\star\xi_n \in \Phi. \tag{4.62}$$

Аналогно множењу базних вектора e_k са координатама ξ_k. Релација (4.61) потсећа на скаларни производ два вектора, осим што се њоме множе вектори различитих простора. Ипак, због изоморфизма можемо користити исту или бар сличну ознаку

$$y^\star(x) = \langle y|x\rangle. \tag{4.63}$$

Потсећам да смо због једноставности у претходном тексту за сва коњуговања користили исту ознаку - звездицу горе. Тако смо писали коњуговање оператора, матрица, скалара, иако су оне различите структуре. На пример, коњуговање матрице $\hat A = (a_{jk})$ писали смо $\hat A^* = (a_{jk})^* = (a_{kj}^*)$, мада је у текстовима физике уобичајено $\hat A^\dagger = (\bar a_{kj})$. То ћемо наставити и даље, осим у посебним случајевима којих ће у наставку бити више.

Линеарни оператор $T: X \to \Phi$, чији простор-слика је скалар Банаховог простора[36], назива се *функционела*. Само у посебним случајевима ћемо наглашавати разлику између функционала и функционеле. Адјунгован оператору T је оператор $T^\star$ који је дефинисан са

$$\langle Ty|x\rangle = \langle y|T^\star x\rangle, \tag{4.64}$$

за све векторе $x, y \in X$. Према томе, $T^\star$ је коњугован оператору T.

[36]Нормиран, комплетан простор назива се Банахов.

За дато T, оператор T^* је јединствен. Поред тога, лако се види да су тачне једнакости:

$$\begin{array}{ll} \langle T^*y|x\rangle = \langle y|Tx\rangle, & (T^*)^* = T, \\ (\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^*, & (T+S)^* = T^* + S^*, \end{array} \tag{4.65}$$

где цртом изнад броја означавамо коњуговање броја. Прва једнакост, горе лево следи из $\langle T^*y|x\rangle = \overline{\langle x|T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx|y\rangle} = \langle y|Tx\rangle$. Друга следи из $\langle (T^*)^*y|x\rangle = \langle y|T^*x\rangle = \langle Ty|x\rangle$, према дефиницији адјунговања. Адитивност следи из $\langle (T+S)^*y|x\rangle = \langle y|(T+S)x\rangle = \langle y|Tx\rangle + \langle y|Tx\rangle = \langle T^*y|x\rangle + \langle S^*y|x\rangle = \langle (T^*+S^*)y|x\rangle$ а отуда $(T+S)^* = T^* + S^*$.

Квантна физика користи исти појам адјунговања (4.64) као и математика. Док она избегава теоретисања и прецизности са теоремама на начин математике, физика се са много рутина и детаља бави начинима означавања. Ради комплетности овог текста, ми ћемо се осврнути и на неке од тих конвенција.

Једначину (4.64) која дефинише адјунговање, у физици пишемо у облику

$$\langle A^\dagger x|y\rangle = \langle x|Ay\rangle. \tag{4.66}$$

Оператору A је адјунгован $A^\dagger$, овде исто што и A^*. Производ $A^\dagger x$ лево има исту вредност као производ Ay десно и то важи за све векторе x и y датог простора.

На пример, нека у простору са две димензије имамо:

$$\hat{A}^\dagger \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \xi_1\end{pmatrix}, \quad \hat{A}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_2\\ 0\end{pmatrix}. \tag{4.67}$$

Тада је матрица $\hat{A}^\dagger$ адјунгована матрици $\hat{A}$, јер је:

$$\begin{cases} \langle A^\dagger x|y\rangle = (0, x_1)\binom{y_1}{y_2} = x_1y_2 \\ \langle x|Ay\rangle = (x_1, x_2)\binom{y_2}{0} = x_1y_2. \end{cases}$$

Први и други резултат су једнаки.

Неке важне особине адјунговања се једнако користе и у физици и у математици. На пример, увек постоји $A^\dagger$, затим $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$, $(\lambda A)^\dagger = \bar{\lambda}A^\dagger$, $(A^\dagger)^\dagger = A$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Ево доказа овог последњег:

$$\langle x|(AB)y\rangle = \langle x|A(By)\rangle = \langle A^\dagger x|By\rangle = \langle B^\dagger(A^\dagger x)|y\rangle,$$

па је $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, јер је множење оператора асоцијативно, иако није комутативно.

Знамо да транспоновање матрице значи замену колона врстама (и врста колонама). Адјунговање[37] матрице значи њено транспоновање и коњуговање свих њених елемената. На пример, матрица колона $\hat{y}$ се транспоновањем преводу у матрицу врсту $\hat{y}^\tau$, чије елементе коњугујемо па пишемо $\hat{y}^\dagger$ односно

$$\langle y|x\rangle = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \bar{y}_1x_1 + \dots + \bar{y}_nx_n,$$

што даје исте вредности као (4.62). На тај начин добијамо:

$$\langle y|Ax\rangle = y^\dagger(Ax) = (A^\dagger y)^\dagger x = \langle A^\dagger y|x\rangle.$$

[37]Адјунговање се назива и хермитско коњуговање.

Једнако радимо и са другим матрицама. Израз $\langle y|A|x\rangle$ пишемо

$$\begin{pmatrix}\bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

а затим $\hat{y}^\dagger(\hat{A}\hat{x}) = (\hat{y}^\dagger\hat{A})\hat{x} = (\hat{A}^\dagger\hat{y})^\dagger\hat{x} = \langle A^\dagger y|x\rangle$. Отуда једнакости:

$$\langle y|A|x\rangle = \langle A^\dagger y|x\rangle = \langle y|Ax\rangle, \tag{4.68}$$

које физичари често користе. Доследно претходном примеру, је:

$$\hat{A}^\dagger = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

а затим (4.67).

То је био кратки осврт на основне ознаке, на начин квантне физике. Пошто овде никада не транспонујемо матрицу са комплексним коефицијентима да би је множили а да је при томе и не коњугујемо, није нам потребна толика разноврсност у ознакама. Коњуговање броја пишемо једноставно $(2+3i)^* = 2-3i$, као што подразумевамо

$$\begin{pmatrix}1+i & 2-3i\\ 4+5i & 2+i\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}1-i & 4-5i\\ 2+3i & 2-i\end{pmatrix}.$$

Из приложеног налазимо да ли је A^* број, матрица или оператор.

У наставку се враћамо на опште особине векторских простора (X или Y) над телом скалара (Φ) да би посветили мало више пажње онима са бесконачном базом. То су простори са бесконачно много димензија које проучава реална односно комплексна функционална анализа, зависно од тога да ли су скалари реални или комплексни бројеви. Сада је потребна мало већа прецизност у неким случајевима у којима нам то за алгебарске просторе (коначно димензионалне) није било битно.

Дефиниција 4.7.1. *Оператор* $A : X \to Y$ *је:*
адитиван *ако је* $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ *за свако* $x_1, x_2 \in X$;
хомоген *ако је* $A(\lambda x) = \lambda Ax$ *за свако* $x \in X$ *и свако* $\lambda \in \Phi$;
линеаран *ако је* $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2$ *за све* $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Phi$.

Оператор је линеаран када је и адитиван и хомоген. То је очигледно. Мало су тежи докази следећих тврђења које зато наводим као леме (мале теореме).

Лема 4.7.2. *За адитиван оператор важи* $A(0) = 0$ *и* $A(-x) = -A(x)$.

Доказ. Из $A(x) = A(x+0) = A(x) + A(0)$ следи $A(0) = 0$.
Из $0 = A(0) = A(x-x) = A(x) + A(-x)$ следи $A(-x) = -A(x)$. □

Следећа особина адитивних (линеарнх) оператора омогућава да и они представљени непрекидним функцијама могу описивати дискретне појаве квантне механике.

Лема 4.7.3. *Ако је адитивни оператор непрекидан у једној тачки простора, он је непрекидан на читавом простору.*

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ тачка у којој је адитивни оператор A непрекидан. Нека је $x \in X$ произвољна тачка и нека је (x_n) низ тачака у X који конвергира ка x. Због претростављене непрекидности у тачки x_0 биће:

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n - x + x_0) = Ax_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n - Ax + Ax_0) = Ax_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax,$$

што значи да је оператор A непрекидан у тачки x. □

Познато нам је да *релација поретка* има особине рефлексивности, антисиметрије и транзитивности. Тако, за свако $x, y, z \in \mathbb{R}$ и релацију „$\le$“ важи:

R. $x \le x$;

A. $(x \le y \ \wedge \ y \le x) \ \Rightarrow \ x = y$;

T. $(x \le y \ \wedge \ y \le z) \ \Rightarrow \ x \le z$.

За скуп снабдевен овом релацијом кажемо да је *уређен.* Број m је *мајоранта* односно *миноранта* дела уређеног скупа ако је редом $x \le m$ односно $m \le x$ за свако x тог дела скупа. Мајоранта односно миноранта која припада датом делу уређеног скупа назива се *максимум* односно *минимум* тог дела скупа. Најмања од мајоранти односно највећа од миноранти која не припада датом делу уређеног скупа, ако таква постоји, назива се редом *супремум* односно *инфимум* датог дела скупа.

За подскуп S, део неког уређеног скупа, уз поменуте називе користимо следеће ознаке: $\max S$ - максимум, $\min S$ - минимум, $\sup S$ - супремум, $\inf S$ - инфимум. Ако постоје они су у поретку: $\inf S \le \min S \le x \le \max S \le \sup S$ $(\forall x \in S)$.

Дефиниција 4.7.4. *Линеарни оператор $A : X \to Y$ је* ограничен *ако постоји ненегативан број $M \in \mathbb{R}^+$ такав да је $\|Ax\| \le M\|x\|$ за свако $x \in X$. Инфимум бројева M за које важи ова неједнакост називамо* нормом *оператора A и означавамо са $\|A\|$.*

Дакле, оператор A је ограничен ако има коначну норму $\|A\|$, када за свако $x \in X$ важи $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$.

Теорема 4.7.5. *Ако је оператор A хомоген, за његову норму важи:*

$$\|A\| = \sup_{x\in X\backslash\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Доказ. Дефиницију ограничености оператора пишимо

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le M, \quad x \ne 0.$$

Инфимум бројева M је супремум бројева на левој страни, затим због хомогености, имамо:

$$\|A\| = \sup_{x\in X\backslash\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X\backslash\{0\}} \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \sup_{x\in X\backslash\{0\}} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|.$$

За свако $x \in X\backslash\{0\}$ је норма вектора $x/\|x\| = 1$, па је

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

чиме је доказан трећи израз. За тачке $x \in X$ за које је $\|x\| \le 1$ имамо:

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \le \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

а очигледно важи и обрнуто. Отуда други. □

Теорема 4.7.6. *Линеарни оператор $A: X \to Y$ је непрекидан акко је ограничен.*

Доказ. Ако је оператор A ограничен, биће:

$$\|Ax_n - Ax_0\| = \|A(x_n - x_0)\| \le \|A\|\|x_n - x_0\|,$$

па из $x_n \to x_0$ следи његова непрекидност у произвољној тачки x_0.

Ако оператор A није ограничен на читавом простору X, из претходне теореме следи да он није ограничен ни на јединичној сфери $\|x\| = 1$. Тада постоји низ тачака (x_n) са $\|x\| = 1$ да $\|Ax_n\| \ge \delta_n \to \infty$, па низ

$$y_n = \frac{x_n}{\delta_n} \to 0, \quad \text{док је} \quad (\forall n)\, \|Ay_n\| \ge 1.$$

Дакле, A није непрекидан оператор у тачки x_0, па на основу леме 4.7.3 он не може бити непрекидан ни у једној другој тачки. □

Према овој и следећој теореми, оператор који ради са вероватноћама, са вредностима ограниченим на бројеве од нуле до један, мора бити непрекидан. Они други оператори који раде са бесконачним (периодичним) опсегом су дискретни.

Теорема 4.7.7. *Потребан и довољан услов да линеаран оператор $A : X \to Y$ буде ограничен јесте да сваки ограничен скуп из X пресликава у ограничен скуп у Y.*

Доказ. Услов је потребан. Ако је оператор ограничен и S неки ограничен скуп:

$$\|A\| < +\infty, \quad (\forall x \in S)\, \|x\| \le M,$$

$$(\forall x \in S)\, \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \le M\|A\|.$$

Услов је довољан. Ако је K јединична затворена кугла у X, тада је њена слика AK ограничен скуп у Y. Дакле, постоји број $M > 0$ такав да је $\|Ax\| \le M$ за свако $x \in K$. Нека је $x \ne 0$ произвољна тачка у X. Тада је $x/\|x\| \in K$, па је:

$$\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \le M \;\Rightarrow\; \|Ax\| \le M\|x\|.$$

Последица очигледно важи и за $x = 0$. Отуда ограниченост оператора A. □

Посебан случај линеарних оператора $A : X \to Y$ су функционеле ($Y = \Phi$). Са друге стране, свакој физичкој *опсервабли* (динамичкој варијабли која се може мерити) придружен је неки оператор који делује на комплексну вероватноћу, таласну функцију. У томе је значај ових теорема.

4.8 Инваријантни потпростор

Дат су векторски простор X над телом $\mathbb{C}$ и линеарни оператор $A : X \to X$. Потпростор $X_0 \subseteq X$ називамо *инваријантним* за оператор A, ако за свако $x_0 \in X_0$ повлачи $Ax_0 \in X_0$, тј. ако је $AX_0 \subseteq X_0$. Тривијалан инваријантан протпростор је нула-вектор.

Инваријантан потпростор оператора $A : X \to X$ чине решења једначине

$$Ax = \lambda x, \quad x \in X, \lambda \in \Phi, \tag{4.69}$$

где нас занимају само нетривијални случајеви $x \neq 0$. Сваки број $\lambda \in \mathbb{C}$ за који ова једначина има нетривијално решење назива се својствена или *сопствена вредност* (eigenvalue) оператора A, а само решење x назива се *сопствени вектор* (eigenfunction) оператора A који одговара сопственој вредности λ. Због $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, сопствене вредности оператора A могу бити и реални бројеви.

Горњу једначину пишемо у облику

$$(\lambda I - A)x = 0, \tag{4.70}$$

где је I јединични елеменат. За нетривијална решења, $x \neq 0$, оператор $A_\lambda = \lambda I - A$ је *сингуларан*, односно не постоји иверзна функција $R_\lambda = A_\lambda^{-1}$, која се назива *резолвента*, за такво λ. Матрице придружене векторима једначину (4.70) трансформишу у хомогени систем једначина чија детерминанта је нула. Она тада има и нетривијална решења.

Тачка λ комплексне равнине $\mathbb{C}$ је *регуларна* тачка оператора A, ако је $\lambda I - A$ регуларан оператор (није сингуларан). Скуп свих регуларних тачака оператора A означимо са $\rho(A)$. Скуп свих тачака $\lambda \notin \rho(A)$ називамо *спектар* оператора A и означавамо га са $\sigma(A)$. За тачку $\lambda \in \sigma(A)$ кажемо да припада спектру оператора A. За такве тачке $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ не постоји.

Када је дати простор X димензије n, за дати оператор $A : X \to X$ не може бити више од n линеарно независних елемената у низу $I, A, A^2, \dots$, што значи да је тада потпуно одређен природни број m такав да су вектори

$$I, A, \dots, A^{m-1} \tag{4.71}$$

независни у датом простору, али да су вектори $I, A, \dots, A^{m-1}, A^n$ линеарно зависни. Ово последње значи да постоје бројеви $\mu_1, \dots, \mu_{m-1} \in \mathbb{C}$ такви да је

$$A^m = \mu_1 A^{m-1} + \dots + \mu_{m-1} A + \mu_m I. \tag{4.72}$$

Из независности вектора скупа(4.71) следи да су бројеви $\mu_1, \dots, \mu_m$ једнозначно одређени са A. Отуда је и полином

$$\mu(\lambda) = \lambda^m - \mu_1 \lambda^{m-1} - \dots - \mu_{m-1}\lambda - \mu_m \tag{4.73}$$

једнозначно одређен елементом A. Према томе, тражење сопствених вредности датог оператора, односно нетривијалних решења једначине (4.69), своди се на тражење нула полинома (4.73).

Приметимо да квадратна матрица $\hat{A}$ реда $k \in \mathbb{N}$ над датим телом $(\mathbb{C})$, зато што садржи низ од $n = k^2$ бројева, наизглед може да образује векторски простор димензије n. Међутим, она поништава полином димензије $m \leq k$, што значи да матрица није n-торка независних, индивидуалних бројева, већ је колектив. Ипак, у скупу свих нетривијалних полинома које A поништава, полином (4.72) је најмањи могући, а то има још једну важну, следећу последицу.

Теорема 4.8.1. *Полином $\mu(\lambda)$ је дивизор сваког полинома којег A поништава.*

Доказ. Претпоставимо да је $P(\lambda)$ полином и да је $P(A) = 0$. Делењем полинома $P(\lambda)$ са $\mu(\lambda)$ добијамо $P(\lambda) = P_1(\lambda)\mu(\lambda) + Q(\lambda)$, где је $P_1(\lambda)$ полином и $Q(\lambda)$ остатак при делењу, тј. степен полинома Q мањи је од m. Али тада је $P(A) = P_1(A)\mu(A) + Q(A)$ што са $P(A) = \mu(A) = 0$ повлачи $Q(A) = 0$. Како је степен полинома $Q(A)$ мањи од m то је $Q(\lambda) = 0$, тј. $\mu(\lambda)$ је дивизор од $P(\lambda)$. □

Зато полином (4.73) називамо *минимални полином* елемента A, а једначину $\mu(A) = 0$ *минималном једначином* елемента A.

Теорема 4.8.2. *Минимални полином оператора A у коначно димензионалном простору је јединствен.*

Доказ. Када би A имало два различита минимална полинома, онда би то значило да се вектор A^m може на два различита начина приказати као линеарни спој независних вектора из скупа (4.71), што је немогуће. □

Знамо да је A^{-1} инверзан или *реципрочан* елеменат елемента A ако је

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \tag{4.74}$$

Елеменат A који поседује реципрочан елеменат назива се *регуларан* или *инвертибилан.* Ако A није инвертибилно кажемо да је *сингуларно.* Инвертибилан је на пример I, сингуларан је 0.

Теорема 4.8.3. *Ако је A инвертибилно, онда је у минималном полиному (4.73) слободни члан различит од нуле и*

$$A^{-1} = \frac{1}{\mu_m}(A^{m-1} - \mu_1 A^{m-2} - \dots - \mu_{m-1}). \tag{4.75}$$

Доказ. Из $\mu_m \ne 0$ и (4.72) следи:

$$\left[\frac{1}{\mu_m}(A^{m-1} - \mu_1 A^{m-2} - \dots - \mu_{m-1} I\right] A = I,$$

а отуда тврђење теореме. □

У уџбенику линеарне алгебре [14] (пример 4.2) можете наћи детаљно решавање следећег задатка, сопствених вектора и вредности матрица.

Пример 4.8.4. *Одредити сопствене вредности и одговарајуће сопствене векторе:*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решење. Једначина (4.70) овде постаје матрична $(\lambda\hat{I} - \hat{A})\mathbf{v} = 0$. Она представља хомогени систем линеарних једначина који поред тривијалног $\mathbf{v} = (0,0,0)$ мора имати и друга решења. Отуда $\det(\lambda\hat{I} - \hat{A}) = 0$ и даље:

$$\begin{vmatrix} \lambda-6 & 12 & 1 \\ -1 & \lambda+3 & 1 \\ 4 & -12 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\lambda-6)\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1\\ -12 & \lambda-3\end{vmatrix}-12\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & \lambda-3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & \lambda+3\\ 4 & 12\end{vmatrix}=0,$$

$$(\lambda-6)(\lambda^2+3)-12(-\lambda-1)-4\lambda=0,$$

$$\lambda^3-6\lambda+11\lambda-6=0,$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0,$$

па су сопствене вредности $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ и $\lambda_3=3$. За одређивање сопственог вектора $\mathbf{v}_1$ који одговара сопственој вредности $\lambda_1=1$ решавамо систем једначина:

$$\begin{pmatrix}6 & -12 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ -4 & 12 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1-6 & 12 & 1\\ -1 & \lambda_1+3 & 1\\ 4 & -12 & \lambda_1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=0,$$

у којем су само две (било које) од три једначина независне. Компоненте x_1 и y_1 изразимо помоћу z_1, добијамо $x_1=-z_1$, $y_1=-\frac{1}{2}z_1$, $z_1\in\mathbb{C}$. Јединични вектор $\mathbf{u}_1=(-2/3,-1/3,2/3)$ је сопствени вектор матрице $\hat{A}$ који одговара њеној сопственој врености $\lambda_1=1$. Приметимо да је сваки вектор облика $\mathbf{v}_1=z_1\mathbf{u}_1$ за произвољан комплексни број z_1 такође сопствени вектор исте матрице са истом сопственом вредношћу, тако да важи једначина (4.69), сада писана $\hat{A}\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1$.

Слично добијамо преостала два сопствена вектора:

$$\mathbf{v}_2=(-7z_2/8,-3z_2/8,z_2),\quad \mathbf{v}_3=(-z_3,-z_3/3,z_3),\quad \forall z_2,z_3\in\mathbb{C},$$

који одговарају сопственим вредностима $\lambda_2=2$ и $\lambda_3=3$ матрице $\hat{A}$.

Једначина $\det(\lambda\hat{I}-\hat{B})=0$ своди се на $\lambda^3+3\lambda^2-4=0$, са двоструким решењем $\lambda_1=\lambda_2=-2$ и $\lambda_3=1$. То су сопствене вредности матрице $\hat{B}$. Спектар је двочлан скуп $\{-2,1\}$. Сопствени вектор за сопствену вредност -2 води до једначине $-2\hat{I}-\hat{B}=0$ која даје $x_1+y_1+z_1=0$. Отуда $x_1=-y_1-z_1$, са произвољним $y_1,z_1\in\mathbb{C}$. Прва два сопствена вектора који одговарају сопственој вредности $\lambda_1=\lambda_2=-2$ су $(-1,1,0)^\tau$ и $(-1,0,1)^\tau$, они разапињу сопствени потпростор

$$\mathbf{v}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

За $\lambda_3=1$ соппствени вектор матрице $\hat{B}$ је $(1,1,1)^\tau$.

Матрица $\hat{C}$ има троструку сопствену вредност $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ којој одговарају само два независна сопствена вектора $(3,1,0)^\tau$ и $(-2,0,1)^\tau$. □

Лако се доказује да је скуп свих регуларних елемената коначно димензионалног простора група. Ако су два коначно димензионална простора изоморфна, онда су и припадне групе регуларних елемената тих простора такође изоморфне. Са друге стране и сопствени вектори датог оператора чине групу. Према томе, линеарни оператор дели векторски простор на две групе, регуларних и сингуларних елемената, од којих је квантној механици нарочито интересантна ова друга, која представља обсервабле.

Особине квантних стања су димензије „апстрактних“ простора квантне механике. Стварни број тих физичких димензија увек је коначан, а како из алгебре знамо да су оператори на коначно димензионалним просторима непрекидни, они су тиме и потпуно непрекидни (сваки ограничен скуп пресликавају у релативно компактан скуп). Чак и када те просторе апроксимирамо бесконачно димензионим, они ограничене скупове пресликавају у ограничене скупове па, према последњим теоремема претходне секције, опет радимо са непрекидним линеарним операторима. Зато су оператори квантне механике непрекидни.

Квантна механика ради са просторима случајних догађаја придруженим векторима које овде називамо комплексним вероватноћама. Ти вектори су у физици познате таласне функције ψ. Када бисмо радили са векторским простором одговарајућих (комплексних) информација $L = \ln\psi$, били би кодомени пресликавања неограничени, јер су такви логаритми комплексних бројева. Те неограничене векторске просторе[38] квантна физика још увек није открила. Осврнимо се сада и на неке изразе и методе функционалне анализе, простора блиских коначно димензионалним.

Нека је X нормиран бесконачно димензиони векторски простор на скупу скалара $\mathbb{C}$ и нека је $A : X \to X$ линеаран оператор. Све комплексне бројеве $\lambda \in \mathbb{C}$ поделимо у класе према томе да ли постоји или не ограничен оператор $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$, тзв. резолвента, или такав не постоји.

Број λ припада *резолвентном скупу* $\rho(A)$ оператора A ако је скуп $A_\lambda X = (\lambda I - A)X$ свуда густ[39] у X и ако A_λ има ограничен инверзан оператор ($R_\lambda = A_\lambda^{-1}$). Број λ припада *континуалном спектру* $\sigma_c(A)$ оператора A, ако је скуп $A_\lambda X$ свуда густ у X и ако A_λ има инверзан оператор, али је овај неограничен. Број λ припада *резидуалном спектру* $\sigma_r(A)$ оператора A, ако је скуп $A_\lambda X$ није свуда густ у X и ако A_λ има инверзан оператор (ограничен или неограничен). Број λ припада *дискретном спектру* $\sigma_d(A)$ оператора A, ако оператор A_λ нема инверзан оператор (без обзира какав је скуп $A_\lambda X$).

Приметимо да се наведени услови међусобно искључују, те да су скупови комплексних бројева $\rho(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ и $\sigma_d(A)$ дисјунктни[40]. Посебно, скуп

$$\sigma(A) = \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_d(A) \tag{4.76}$$

је *спектар* оператора A.

Решења једначине (4.69), тј. $Ax = \lambda x$, су вектори x које називамо сопственим (карактеристичним) векторима оператора A којима одговарају сопствене (карактеристичне) вредности λ. Како је за постојање инверзног оператора $\lambda I - A$ потребно и довољно да важи импликација

$$(\lambda x - A)x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0,$$

то дискретни спектар оператора A образују баш његове сопствене вредности.

У коначно димензионалном простору ако постоји $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$, другим речима ако је $A_\lambda = \lambda I - A$ бијекција (обострано једнозначно пресликавање) са X на X, онда због линеарности и A_λ пресликава X на X. Линеарни оператор на коначно димензионалном простору је непрекидан, па и потпуно непрекидан. Зато оператор A_λ тамо или има ограничен инверзан оператор, или га уопште нема. Комплексан број λ или припада резолвентном скупу или дискретном спектру оператора A (континуални и резидуални

[38] Функционална анализа проучава и неограничене кодомене.

[39] Свуда густ - између свака два постоји бесконачно много њих.

[40] Дисјунктни - скупови без заједничких елемената.

спектар од A су празни). Напротив, у бесконачно димензионалном простору ниједна од компонената спектра (континуални, резидуални, дискретни део) не мора да буде празна.

Пример 4.8.5. *Када је $A : X \to X$ потпуно непрекидан оператор, показати да комплексан број $\lambda \ne 0$ припада или резолвентном скупу или дискретном спектру тог оператора. Само нула може припадати континуалном или резидуалном спектру.*

Упутство. Посматрајте систем линеарних једначина:

$$\begin{cases} (1-a_{11})\xi_1 - a_{12}\xi_2 - \dots - a_{1k}\xi_n = \eta_1 \\ -a_{21})\xi_1 + (1-a_{12})\xi_2 - \dots - a_{2n}\xi_k = \eta_2 \\ \dots \\ -a_{n1}\xi_1 - a_{n2}\xi_2 - \dots + (1-a_{nn})\xi_k = \eta_n, \end{cases} \tag{4.77}$$

који који се може краће писати у облику

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{jk} - a_{jk})\xi_j = \eta_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{4.78}$$

односно $(I - A)x = y$, где су вектори $x = (\xi_k)$ и $y = (\eta_k)$, при чему је $\delta_{kk} = 1$ и $\delta_{jk} = 0$ када $j \ne k$, а $A : X \to X$ је потпуно непрекидан линеарни оператор. Присетите се познатог става (Фредхолмова алтернатива[41]): једначина $x - Ax = y$ има решење за свако $y \in X$, акко једначина $x - Ax = 0$ има једино тривијално решење. □

Ако је $A : X \to X$ потпуно неперкидан оператор и $B : X \to X$ ограничен оператор, лако је доказати да су AB и BA потпуно непрекидни оператори. То ћемо употребити у следећој теореми.

Теорема 4.8.6. *Нека је $A : X \to X$ потпуно непрекидан оператор и $\rho > 0$. Тада A има само коначно много линеарно независних сопствених вектора који одговарају оним сопственим вредностима λ које су по апсолутној вредности веће од ρ.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да A има бесконачно много линеарно независних сопствених вектора x_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) таквих да је $Ax_k = \lambda_k x_k$ и $|\lambda_k| > \rho > 0$.

Уочимо потпростор $X_1 \subseteq X$ који разапињу вектори x_n. На X_1 оператор A има ограничен инверзан оператор. Наиме, вектори облика $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ образују свуда густ скуп у X_1. За ове векторе је $Ax = a_1\lambda_1x_1 + a_2\lambda_2x_2 + \dots + a_n\lambda_nx_n$, па за њих, због $A^{-1}(Ax) = x$, важи

$$A^{-1}x = \frac{a_1}{\lambda_1}x_1 + \frac{a_2}{\lambda_2}x_2 + \dots + \frac{a_n}{\lambda_n}x_n,$$

а отуда

$$\|A^{-1}x\| \le \frac{1}{\rho}\|x\|.$$

Овај A^{-1} се може непрекидно проширити на X_1 без повећања норме, јер је скуп x који га дефинише свуда густ у X_1.

Како је A потпуно непрекидан оператор на X, он је такав и на X_1. Међутим, потпуно непрекидан оператор не може имати ограничен инверзан оператор у бесконачно димензионалном простору. Отуда контрадикција, па је теорема доказана. □

[41] Fredholm alternative: `https://en.wikipedia.org/wiki/Fredholm_alternative`

4.9 Унитарни оператори

У даљем тексту посматрамо унитарни простор X над телом Φ, које ће углавном бити скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$. То значи да је сваком уређеном пару вектора x, y из X придружен скалар $\langle x, y\rangle$ из Φ, који можемо писати и на Дираков „бра-кет“ начин $\langle x|y\rangle$, као што је урађено уз функционелу (4.63) и даље. Приметимо да у општем случају, линеарни оператор A у том простору води у неједнакост $\langle Ax|Ay\rangle \ne \langle x|y\rangle$. На пример, за оператор $Ax = ax$ множења скаларом $a \in \mathbb{C}$ таквим да је $|a| \ne 1$.

Дефиниција 4.9.1. *Оператор* $U : X \to X$ *за који вреди* $\langle Ux|Uy\rangle = \langle x|y\rangle$ *за све* $x, y \in X$, *назива се* унитарни оператор.

Идентична функција је тривијални унитарни оператор. Једноставан унитарни оператор су и ротације, јер не мењају дужину нити угао између вектора, па према томе нити скаларни производ. Слична ротацијама су и множења бројем $e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, која су такође унитарни оператори. Фуријеве трансформације функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ које се дефинишу са

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}, \tag{4.79}$$

су унитарни оператори.

Теорема 4.9.2. *Унитарни оператор је линеаран.*

Доказ. Треба показати да је

$$U(\alpha x + \beta y) = \alpha Ux + \beta Uy, \tag{4.80}$$

за све $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и све $x, y \in X$.

Означимо са $K(U)$ кодомен, подручје вредности оператора U, а са $L(U)$ потпростор којега $K(U)$ разапиње. Тада је вектор

$$v = U(\alpha x + \beta y) - \alpha U(x) - \beta U(y) \in L(U).$$

За произвољно $z \in X$ скаларни производ $\langle v|z\rangle$ је:

$$\langle U(\alpha x + \beta y - \alpha U(x) - \beta U(y)|U(z)\rangle =$$

$$= \langle U(\alpha x + \beta y)|U(z)\rangle - \alpha\langle U(x)|U(z)\rangle - \beta\langle U(y)|U(z)\rangle$$
$$= \langle \alpha x + \beta y|z\rangle - \alpha\langle x|z\rangle - \beta\langle y|z\rangle = 0.$$

Према томе, вектор v је окомит на потпростор $L(U)$, па је окомит и на самог себе, тј. он исчезава. Отуда (4.80). □

Ова теорема важи како за коначно тако и за бесконачно димензионалне просторе. Међутим, у коначно димензионалним просторима X биће $K(U) = X$. Наиме, за базу $e_1, \dots, e_n$ из X, вектори $Ue_1, \dots, Ue_n$ линеарно су независни, јер

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k Ue_k = 0$$

повлачи да за свако $x \in X$ мора бити

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle Ue_k|Ux\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k|x\rangle = 0.$$

Отуда $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0$, што повлачи $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ а затим и линеарну независност вектора $Ue_1, \dots, Ue_n$. Како унитарни оператор пресликава X на X, постоји и инверзни оператор U^{-1}.

На начин овог доказа, да унитаран оператор пресликава X на X (сурјекцијом), можемо показати и да је скуп свих унитарних оператора са X на X мултипликативна група. Такође, видимо зашто се та група у реланим просторима ($\Phi = \mathbb{R}$) често назива групом *ортогогоналних оператора.*

Из квантне физике нам је позната поопштена, тачкаста дистрибуција:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1, \tag{4.81}$$

која се назива *Диракова делта.* Она у строгом математичком смислу није функција, већ означава место (x) на којем се са (великом) извесношћу налази дата тачка. Зато пишемо

$$\langle y|x\rangle = \delta(y - x), \tag{4.82}$$

када вероватноћа да је $x = y$ износи један, тј. $\Pr(x = y) = 1$.

Међутим, Диракова делта има добро дефинисану Фуријеову трансформацију

$$\hat{\delta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi}\delta(x)\,dx = 1. \tag{4.83}$$

Она спада у тзв. Шварцове функције, чији се изводи нагло мењају. За произвољну Шварцову функцију φ са Фуријеовом трансформацијом $\hat{\varphi}$, важи

$$\langle\hat{\delta}|\varphi\rangle = \langle\delta|\hat{\varphi}\rangle, \quad \forall\varphi, \tag{4.84}$$

па је већ због тога $\hat{\delta} = 1$.

Једноставан пример употребе Диракове делте и његове нотације можемо посматрати на деловању оператора транслације T_a. То је линеарна трансформација која сопствено стање (eigenstate) позиције $\vec{x}$ преводи у стање транслирано (увећано) за вектор $\vec{a}$:

$$T_a|\vec{x}\rangle \equiv |\vec{x} + \vec{a}\rangle. \tag{4.85}$$

Оператор T_a је унитаран, а његова коњугована вредност је транслација за супротни вектор $-\vec{a}$. Наиме, скаларни производ старог и новог стања је:

$$\langle\vec{y}|T_a|\vec{x}\rangle = \langle\vec{y}|T_a\vec{x}\rangle = \langle\vec{y}|\vec{x} + \vec{a}\rangle =$$

$$= \delta((\vec{y} + \vec{a}) - \vec{x}) = \delta(\vec{y} - (\vec{x} - \vec{a}))$$

$$= \langle\vec{y} - \vec{a}|\vec{x}\rangle = \langle T_{-a}\vec{y}|\vec{x}\rangle,$$

одакле $T_a^\dagger = T_{-a}$, што овде пишемо $T_a^* = T_{-a}$.

Након транслације напред и назад за исти вектор $\vec{a}$ добија се почетно стање, јер је $T_a^\dagger T_a|\vec{x}\rangle = |\vec{x}\rangle$, па је $T_a^\dagger = T_a^{-1}$, што значи да је оператор транслације унитаран. На овај начин видимо да сваки оператор који је унитаран мора бити себи инверзан, али и обрнуто, сваки оператор који је сам себи инверзан је унитаран.

Како је $\langle Ux|Ux\rangle = \langle U^*x|x\rangle = \|U\|^2\|x\|^2$, из дефиниције 4.9.1 следи $\|U\|^2 = 1$, а отуда

$$U = e^{i\phi}, \quad \phi \in \mathbb{R}, \tag{4.86}$$

што значи да је сваки унитарни оператор нека ротација (за угао ϕ). Аналогна унитарној је у геометрији изометријска трансформација или *изометрија*, што значи промена која не мења удаљеност између две произвољне тачке. Из основа геометрије знамо да се свака изометрија може свести на ротације. Транслација је изометрија, па овај резултат не изненађује.

Непосредно из (4.86), за оператор транслације можемо писати

$$T_a = e^{-i\vec{K}\cdot\vec{a}}, \quad \vec{K} = \vec{K}^\dagger, \tag{4.87}$$

где је $\vec{K}$ неки хермитски оператор. До истог долазимо и овако:

$$1 = T_a^\dagger T_a = e^{i\vec{K}^\dagger\cdot\vec{a}} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{a}} = e^{i(\vec{K}^\dagger - \vec{K})\cdot\vec{a}},$$

$$\vec{K} = \vec{K}^\dagger,$$

што значи да је $\vec{K}$ хермитски оператор. Вратимо се сада опет на деловање унитарних оператора на векторе базе.

Ако је $e_1, \dots, e_n$ ортонормирана база у X и U унитарни оператор, онда је

$$\langle Ue_j|Ue_k\rangle = \langle e_j|e_k\rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \ne k \end{cases}. \tag{4.88}$$

Унитаран оператор преводи ортонормирану базу простора у ортонормирану базу. Важи и обрнуто, за било које две ортонормиране базе $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ простора X постоји унитарни оператор U такав да је $e'_k = Ue_k$ редом за $k = 1, \dots, n$. Наиме, придружимо наведени унитарни оператор вектору:

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \Rightarrow Ux = \sum_{k=1}^n \xi_k e'_k.$$

Приметимо да је тај оператор заиста унитаран:

$$\langle Ux|Uy\rangle = \langle \sum_{j=1}^n \xi_j e'_j | \sum_{k=1}^n \eta_k e'_k\rangle = \sum_{j,k=1}^n \bar{\xi}_j \eta_k \langle e'_j|e'_k\rangle = \sum_{j,k=1}^n \bar{\xi}_j \eta_k \delta_{jk} = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \eta_k = \langle x|y\rangle,$$

за све $x, y \in X$. Још су општија следећа тврђења, овде наведена као примери, чије доказе можете пронаћи у уџбенику (више) линеарне алгебре.

Пример 4.9.3. *Нека су $x_1, \dots, x_n$ и $x'_1, \dots, x'_n$ две n-торке вектора из истог унитарног простора X димензије n. Ако је*

$$\langle x_j|x_k\rangle = \langle x'_j|x'_k\rangle, \quad \forall j, k = 1, \dots, n, \tag{4.89}$$

тада постоји бар један унитарни оператор U да је $x'_k = Ux_k$, $\forall k = 1, \dots, n$.

Услов (4.89) се може писати мало другачије за даље уопштавање. Вектори x_k и x'_k придружују се један другоме преко индекса k. Дефинишимо функцију $x'_k = \phi(x_k)$ и скуп $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, да ту релацију можемо писати у облику

$$\langle x|y\rangle = \langle \phi(x)|\phi(y)\rangle, \quad \forall x, y \in S. \tag{4.90}$$

Претходни став прераста у тврђење да постоји унитарни оператор у X, који се путем ϕ подудара на S.

Пример 4.9.4. *Нека су X и Y унитарни простори над истим телом Φ, а $S \subseteq X$ и $G \subseteq Y$ подскупови такви да постоји реципрочно једнозначно пресликавање (бијекција) ϕ са S на G са својством (4.90). Тада постоји линеарни оператор U са кодомена $K(S)$ на кодомен $K(G)$, sa svojstvom*

$$\langle x|y\rangle = \langle Ux|Uy\rangle, \quad \forall x, y \in K(S),$$

и $Ux = \phi(x)$, $\forall x \in S$.

Знамо да у n димензионалном векторском простору X^n увек постоји база, скуп од n линеарно независних вектора, да је сваки вектор тог простора неки линеарни спој базних вектора. Тај базни скуп се увек може заменити с ортонорминраним скупом који је и даље нека база простора X^n. У алгебри, најпопуларнији од таквих је следећи тзв. *Грам-Шмитов поступак* ортогонализације[42].

Нека је $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ коначан или пребројив низ вектора неког унитарног простора X и нека је $L(E)$ потпростор разапет (скуп свих линеарних комбинација вектора датог скупа) тим скупом.

Формирамо низ детерминанти

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \begin{vmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & x_1 \\ \langle x_2|x_1\rangle & x_2 \end{vmatrix}, \quad y_3 = \begin{vmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \langle x_1|x_2\rangle & x_1 \\ \langle x_2|x_1\rangle & \langle x_2|x_2\rangle & x_2 \\ \langle x_3|x_1\rangle & \langle x_3|x_2\rangle & x_3 \end{vmatrix}, \quad \dots \tag{4.91}$$

где је y_k вектор који се добије развијањем k-те детерминанте по последњој колони. Од неког тренутка, у n-том кораку, све даље детерминанте су нуле. Добијена n-торка вектора (y_k) је тражена ортогонална база потпростора $L(E)$ коју треба нормирати.

Пример 4.9.5. *У реалном простору X^3 са скаларним производом*

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3,$$

треба ортонормирати векторе

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,$$

помоћу Грам-Шмитовог поступка.

Решење. Формирамо низ детерминанти (4.91): $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$,

$$\mathbf{y}_2 = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1\rangle & \mathbf{x}_1 \\ \langle \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1\rangle & \mathbf{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{x}_1 \\ 1 & \mathbf{x}_2 \end{vmatrix} = -\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{y}_3 = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\rangle & \mathbf{x}_1 \\ \langle \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_2\rangle & \mathbf{x}_2 \\ \langle \mathbf{x}_3|\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_3|\mathbf{x}_2\rangle & \mathbf{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \mathbf{x}_1 \\ 1 & 3 & \mathbf{x}_2 \\ 1 & -1 & \mathbf{x}_3 \end{vmatrix} = -4\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 + 8\mathbf{x}_3.$$

Отуда ортогонални вектори:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{y}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{y}_3 = 8\mathbf{e}_1 - 8\mathbf{e}_2.$$

Израчунавамо норме $||\mathbf{y}_1|| = \sqrt{3}$, $||\mathbf{y}_2|| = 2\sqrt{6}$ и $||\mathbf{y}_3|| = 4\sqrt{2}$, па налазимо одговарајуће јединичне векторе $\mathbf{e}'_k = \mathbf{y}_k/||\mathbf{y}_k||$, редом за $k = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3}{\sqrt{6}}, \quad \mathbf{e}'_3 = \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}.$$

То је тражена ортонормирана база. □

[42] Gram–Schmidt process: `https://en.wikipedia.org/wiki/Gram%E2%80%93Schmidt_process`

Пример 4.9.6. *Векторе* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in X^3$ *из прошлог примера ортонормирајмо истим поступком, али када је скаларни производ* $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \xi_1\eta_1 + 2\xi_2\eta_2 + 3\xi_3\eta_3$.

Решење. Након израчунавања детерминанти (4.91) сада добијамо:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_2 = 6\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{y}_3 = 12(-\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3),$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{y}_2 = 6(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{y}_3 = 24(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2),$$
$$\mathbf{e}_1' = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{e}_2' = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3}{\sqrt{6}}, \quad \mathbf{e}_3' = \frac{2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{\sqrt{6}}.$$

То је тражена ортонормирана база. □

Грам-Шмитов поступак добијања окомитих вектора из скупа датих вектора може се употребити и у другачијим задацима, као у следећем примеру.

Пример 4.9.7. *Вектор* $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ *приказати као линеарни спој вектора* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ *из примера 4.9.5.*

Решење. Како је вектор

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\rangle & \langle \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_3\rangle & \mathbf{x}_1 \\ \langle \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_2\rangle & \langle \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3\rangle & \mathbf{x}_2 \\ \langle \mathbf{x}_3|\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_3|\mathbf{x}_2\rangle & \langle \mathbf{x}_3|\mathbf{x}_3\rangle & \mathbf{x}_3 \\ \langle \mathbf{a}|\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{a}|\mathbf{x}_2\rangle & \langle \mathbf{a}|\mathbf{x}_3\rangle & \mathbf{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \mathbf{x}_1 \\ 1 & 3 & -1 & \mathbf{x}_2 \\ 1 & -1 & 3 & \mathbf{x}_3 \\ 4 & -2 & 6 & \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

окомит на векторе $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, тј. на базу простора, то је $\mathbf{x} = 0$. Отуда, развијањем детерминанте по последњој колони, добијамо $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 + \frac{3}{2}\mathbf{x}_3$. □

Уз доказ исправности Грам-Шмитовог поступка формирања ортонормиране базе простора, које можете потражити у уџбеницима више алгебре, долази још неколико занимљивих теорема, од којих је можда најважнија следећа. Ако је Y коначно димензионалан потпростор унитарног простора X онда се сваки вектор $x \in X$ може на јединствен начин писати у облику

$$x = y + z, \tag{4.92}$$

где је $y \in Y$ и $z \perp Y$. То је једноставнија верзија познате *теореме о пројекцији*, која се у уџбеницима исказује и доказује на различите начине.

На крају погледајмо попис назива оператора који се често користе у унитарним[43] просторима. Сваки од ових оператора је линеарно пресликавање $(X \to X)$:

N је *нормалан*, ако комутира са са својим адјунгованим ($N^*N = NN^*$);

U је *унитаран*, ако је $U^*U = I$;

H је *хермитски*, ако је $H^* = H$; ;

K је *антихермитски*, ако је $K^* = -K$.

Исте називе користимо за одговарајуће матрице, репрезентације наведених оператора.

Нормални оператори су толико важни и карактеристични пратиоци унитарних простора, да можемо рећи да је теорија унитарних простора заправо теорија нормалних оператора[44]. Када је X реалан простор, уместо речи хермитски често се употребљава реч *симетричан*, уместо антихермитски *антисиметричан* или *кососиметричан*, уместо унитаран *ортогоналан.*

[43] Унитаран простор - снабдевеним скаларним производом.

[44] То је цитат из књиге [13].

4.10 Квантни простори

Материја која нас окружује, супстанца наше васионе, састоји се од реализованих и нереализованих случајних догађаја. Према томе, случајне догађаје разврставамо у две класе, у класу *реалних* и класу *нереалних*. Реалан догађај је онај који комуницира (размењује информације) са неким од реалних догађаја и зато је у реду рећи да он тада постаје реализација случајног догађаја. Реализација случајних догађаја је процес трансформације неизвесности у информацију, за који важе принципи вероватноће и током којег је укупна количина неизвесности и информације стално иста. Нећемо рећи „математички принципи“ и „физичка количина“, јер те појмове у савременој теорији тек треба допуњавати.

Супстанца овде није само оно што је и у класичном смислу, односно није само оно што је реално. Зато што је интеракција размена информација са реалним, морамо под материјом подразумевати и нереализоване делови васионе од којих настаје информација. То значи да „нереално“ морамо поделити у најмање две класе. Прва класа нереалних су *немогући* догађаји, који не могу комуцирати са реалним. Друга класа су *виртуелни* догађаји, који би могли комуницирати са реалним, али нису. Међутим, „комуникација“ нереализованих није комуникација правом смислу, јер није размена информација. Ако постоје узајамно зависни случајни догађаји, онда постоје и интеракције без размене информације.

Приметимо да исказ „реалним догађајима сматрамо само оне који су у интеракцији са другим догађајима које сматрамо реалним“, дели васиону у односу на посматрача на „овострану“ и „онострану“, што само на први поглед звучи бесмислено. Друго, свака размена информација је нека интеракција, али није и обрнуто. Неке интеракције иду без размене информације.

Оба дела наше васионе, реални и виртуелни, покривају функције које овде називамо комплексним вероватноћама. Комплексне вероватноће су у квантној механици познате таласне функције $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$, са доменом у реалном простор-времену (положај $\mathbf{r}$ у тренутку t) и кодоменом у скупу комплексних бројева. Оне за дато квантно стање чине векторски простор. Дакле, квантни простор чине вектори који су комплексне вероватноће случајних догађаја, а случајни догађаји су једна или више честице, особине честица и стања честица.

Према дефиницији простора комплексних функција ψ, квантни простори су снабдевени скаларним производом[45] $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, са нормом $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$. Функције ψ су експоненцијалне функције комплексних информација $-L$. Другим речима, информације су (негативни) логаритми вероватноћа. Комплексни логаритми имају неограничене аргументе тако да су њихове експоненцијалне вредности периодичне функције. Како су све функције ψ периодичне, то су таква и квантна стања (једна или више честица, особине честица и стања честица). Посебно, у реду је сваку честицу сматрати и таласом.

Поред тога, збир коњуговано комплексних бројева $L^* + L$ је реална информација, па је доследно томе производ коњуговано комплексних бројева $\|\psi\|^2 = \psi^*\psi$ реална вероватноћа. Дакле, у реду је подржати да норма вектора комплексне вероватноће није исто што и вероватноћа реалног догађаја. То такође има своје последице.

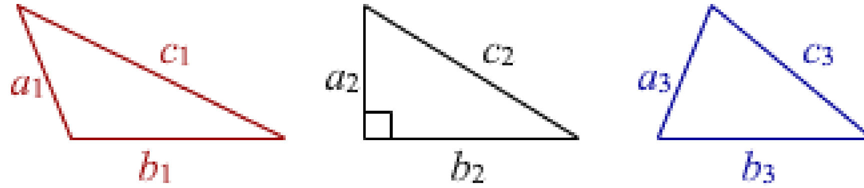
На слици 4.6 видимо три троугла (са углом γ наспрам странице c). Први троугао је тупоугли ($\gamma_1 > 180°$), други је правоугли ($\gamma_2 = 90°$), трећи оштроугли ($\gamma_3 < 90°$). За странице троуглова важи неједнакост троугла ($c < a + b$): свака је страница троугла

[45] в. секцију 4.5 Унитарни простори

мања од збира остале две. Али, она не важи за квадрате страница:

$$c_1^2 > a_1^2 + b_1^2, \quad c_2^2 = a_2^2 + b_2^2, \quad c_3^2 < a_3^2 + b_3^2. \tag{4.93}$$

Сличне девијације показаће реалне вероватноће $||\psi||^2$ које су квадрати норми вектора ψ, у односу на норме $||\psi||$.



Slika 4.6: Тупоугли, правоугли и оштроугли троугао.

Скаларне производе је формално могуће увести на различите начине, али у складу са схватањем реалности, избор скаларог производа одређује мерење. Сви догађаји које можемо потврдити у неком експерименту, мерењем, за нас су реални, јер су у интеракцији са нечим реалним. Наиме, мерење је такође интеракција, а интеракција је у свету реалног исто што и размена информација.

Посматрање васионе као места реализације случајних догађаја отвара могућност још једне врсте репрезентација апстрактних простора у квантној физици. То су (још увек неоткривени) простори комплексних информација. Вектори (L) таквог простора били би неограничени, јер су неограничени аргументи логаритама комплексних бројева, што би према теоремама функционалне анализе значило да су им оператори дискретни[46]. Са друге стране, вектори (ψ) квантних простора којима се овде бавимо, ограничени су и зато су им оператори непрекидни.

Интуитивно осећамо да разни случајни догађаји могу произвести разне последице. Нећу једнако покиснути ако у згради отворим кишобран па прошетам по киши, као када прво прошетам по киши а затим уђем у зграду и отворим кишобран. Уопште, појава прво догађаја S_1 за којим следи догађај S_2 може (али не мора) имати другачије последице од појаве прво догађаја S_2 а затим S_1. То нас доводи до некомутативности оператора. За дате операторе A и B се може десити неки вектор ψ такав да буде $AB\psi \ne BA\psi$, када пишемо $AB \ne BA$ и кажемо да су ти оператори не-комутативни. Величину комутативности оператора A и B меримо *комутатором* тих оператора:

$$[A, B] = AB - BA. \tag{4.94}$$

Из (не) комутативности линеарних оператора следи иста особина њихових матрица. Ево неких познатих особина комутатора линеарних оператора, које се често користе у квантној механици:

$$\begin{array}{ll} 1.\ [A,A] = 0, & 2.\ [A,B] + [B,A] = 0, \\ 3.\ [A,B+C] = [A,B] + [A,C], & 4.\ [A+B,C] = [A,C]+[B,C], \\ 5.\ [A,BC]= [A,B]C + B[A,C], & 6.\ [AB,C]=[A,C]B+A[B,C], \\ 7.\ [A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]=0, & \end{array} \tag{4.95}$$

За пример, доказујемо 6. $[AB, C] = (AB)C - C(AB) =$

$$= ABC - CAB + ACB - ACB$$

[46] в. теорему 4.7.7, претходну и сличне

$$= (AC - CA)B + A(BC - CB)$$
$$= [A, C]B + A[B, C].$$

Слично се доказују и остале. Читаоцу препуштам да докаже и једнакост

$$[\sum_j A_j, \sum_k B_k] = \sum_{j,k}[A_j, B_k], \tag{4.96}$$

да је комутатор збирова једнак збиру комутатора.

Оператори мењају вероватноће догађаја. На пример, густина вероватноће налажења материјалне тачке на апсциси одређена је комплексном функцијом ψ. Густине $\|\psi\|^2$ приказане ординатама требале би имати облик Гаусовог звона[47], а оператор[48] положаја $\tilde{x} : \psi \to x\psi$ преместиће то Гаусово звоно, са позиције 1 на позицију x апсцисе. Приметимо да деловање оператора на вероватноће има исто значење као њихово деловање на саме догађаје, реалне и виртуелне, при чему они виртуелни, док год су такви (нереални), остају нама неухватљиви. Према томе, оператори поред тога што се у реалном држе закона физике (рецимо закона одржања), стварају реалност.

Подсетимо се сада математичке расподеле вероватноће. За дисјунктне догађаје $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ са вероватноћама[49] $p_k = \Pr(\omega_k)$ важи једнакост $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Слично важи и за расподеле промењливе x по вредностима $x_1, x_2, \dots, x_n$, где $p_k = \Pr(x = x_k)$ није импулс већ је вероватноћа да случајна промењлива x узме вредности x_k. Пишемо

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1. \tag{4.97}$$

Средња вредност ове дискретне расподеле је

$$\mu(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k. \tag{4.98}$$

Број $\mu = \mu(x)$ називамо *математичко очекивање* дате случајне варијабле. Средње квадратно одступање од очекивања μ је *варијанса*

$$\text{var}(x) = \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 p_k, \tag{4.99}$$

чији корен је *дисперзија*, ознаке $\sigma(x)$. Када $n \to \infty$, прелазимо на апроксимацију непрекидним функцијама, па очекивање и варијанса постају:

$$\mu(x) = \int_\Omega x\rho(x)\, d\omega, \quad \text{var}(x) = \int_\Omega (x - \mu)^2 \rho(x)\, d\omega, \tag{4.100}$$

где је $\rho(x)$ густина вероватноће, а интеграли се по целом (Ω) простору случајних догађаја. Тада расподелу називамо континуалном. Збир свих вероватноћа дискретне расподеле је један, као и интеграл континуалне густине по целом простору.

Када ове одреднице из теорије вероватноће примењујемо на величине из квантне механике узећемо у обзир да радимо са унитарним простором вектора ψ над телом комплексних бројева. Како год да је дефинисан, скаларни производ $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ треба

[47] Gaussian function: `https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_function`

[48] Тилда изнад слова оператора, за разлику од шешира (енг. hat) за матрицу.

[49] енг. Probability - вероватноћа

одржати свој основни смисао, мере интеракције између вектора ψ_1 и ψ_2, али тако „баждарене“ да у случају $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ тај производ постаје вероватноћа $\|\psi\|^2$ коју требамо моћи препознати у математичкој теорији и мерењем.

Прва особина скаларног производа, $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$, значи да је резултат реалан број, те да ово „множење“ изражава реалне интеракције. Друга, $\langle\psi_1|\lambda\psi_2\rangle = \lambda\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, говори о могућности одржања реалности интеракције када се прва вероватноћа множи одговарајућим бројем, а друга са трећом, $\langle\psi|\psi_1+\psi_2\rangle = \langle\psi|\psi_1\rangle+\langle\psi|\psi_2\rangle$, говори о одржању количине догађаја односно њихових вероватноћа. Четврта особина, $\psi \ne 0 \Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle > 0$, каже да чим има комплексне вероватноће има и реалне.

Тестирајмо исправност ових интерпретација на примеру 4.5.1. Прва једнакост, $\langle\lambda\psi_1|\psi_2\rangle = \lambda^*\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, каже да реална интеракција $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ може престати бити реална, ако се нека (овде прва) од две вероватноће множи неодговарајућим бројем. Али и обрнуто. Та са другом једнакошћу, $\langle\psi_1 + \psi_2|\psi\rangle = \langle\psi_1|\psi\rangle + \langle\psi_2|\psi\rangle$, потврђује претходни налаз о одржању количина, али сада и у односу на прве учеснике множења (мерења). Када трећу релацију логаритмујемо, $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 \le \langle\psi_1|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\psi_2\rangle$, добијамо:

$$\ln|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 \le \ln\langle\psi_1|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\psi_2\rangle,$$

$$-\ln|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| \ge \frac{1}{2}(-\ln\langle\psi_1|\psi_1\rangle - \ln\langle\psi_2|\psi_2\rangle),$$

$$L_{12} \ge \frac{1}{2}(L_1 + L_2). \tag{4.101}$$

Размењена информација интеракцијом L_{12} није мања од аритметичке средине информација L_1 и L_2 појединих квантних система који учествују у интеракцији. При томе, важи неједнакост када год се ради о различитим системима.

Само је интерпретација последњег од резултата необична, али је и она прихватљива. Просто речено, формула (4.101) значи да интеракција (за нас) није мање информативна од просечног учесника (а ако су учесници различити онда је сигурно већа). Неједнакост би могла да појасни однос реалног и виртуелног догађања, да омогући виртуелном догађају (у интеракцији са реалним) да се реализује.

Даље особине квантног простора, посебно скаларног производа таласних функција, тражимо у независним догађајима чије вероватноће се множе. Размотримо то на примеру бацања новчића и коцке. Вероватноћа да падне „писмо“ при бацању новчића је $\frac{1}{2}$, а вероватноћа да падне „шестица“ при бацању коцке је $\frac{1}{6}$, па вероватноћа да при истовременом бацању новчића и коцке падну „писмо“ и „шестица“ износи $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, ако су ова два бацања независни догађаји. Аналогно, ако су ψ_1 и ψ_2 комплексне вероватноће два независна квантна догађаја, онда је вероватноћа њихове интеракције скаларни производ $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$. Када тако поопштавамо вероватноћу пара независних догађаја, доследно је сматрати да само резултати из скупа реалних бројева представљају реалне вероватноће. Посебно, $\langle\psi|\psi\rangle = \|\psi\|^2$ била би *сопствена вероватноћа*.

Вратимо се сада на непрекидне функције за које смо рекли да су главни оператори квантних простора, што се односи и на вероватноће ψ. Ради једноставности, посматрајмо само једну димензију физичког простора. На домену $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ и кодомену неком подскупу скупа $\mathbb{C}$ интеграбилних функција, израз

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_a^b \psi_1^*\psi_2\,dx. \tag{4.102}$$

је добро дефинисан скаларни производ функција $\psi_1 = \psi_1(x,t)$ и $\psi_2 = \psi_2(x,t)$. Као скаларан производ, он је мера вероватноће интеракције односно комуникације између два квантна система са вероватноћама $\psi_1 = \psi_1(x,t)$ и $\psi_2 = \psi_2(x,t)$. Тако се дефинишу функционал (4.63) и функционела.

Према (4.64), за оператор A^* кажемо[50] да је адјунгован оператору A када за све таласне функције ψ_1 и ψ_2 важи:

$$\langle A^*\psi_1|\psi_2\rangle = \langle \psi_1|A\psi_2\rangle,$$

$$\int_a^b (A^*\psi_1)^*\psi_2\,dx = \int_a^b \psi_1^*(A\psi_2)\,dx, \tag{4.103}$$

што је тачно ако је $(A^*\psi_1)^*\psi_2 = \psi_1^* A\psi_2$.

Поопштавајући (4.100), за очекивање оператора A узимамо:

$$\langle\psi|A\psi\rangle = \int_a^b \psi^* A\psi\,dx, \quad ||\psi||^2 = \int_a^b \psi^*\psi\,dx = 1. \tag{4.104}$$

Пишемо и $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|A\psi\rangle$. Све опсервабле представљамо на овај начин. Како су опсервабле реалне (добијене су мерењем), мора бити $\langle A\rangle^* = \langle A\rangle$, односно

$$\int_a^b \psi^* A\psi\,dx = (A\psi)^*\psi\,dx, \tag{4.105}$$

а оператор A који испуњава такав услов назива се хермитски. За хермитски оператор уопште важи

$$\int_a^b \psi_1^* A\psi_2\,dx = \int_a^b (A\psi_1)^*\psi_2\,dx, \tag{4.106}$$

за било која два вектора, тј. функције ψ_1 и ψ_2, датог простора.

Како је $\psi = \psi(x,t)$ вероватноћа догађаја на месту x у тренутку t, то се очекивање догађаја на датом месту у датом тренутку дефинише са

$$\langle x\rangle = \langle\psi|x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x\psi\,dx. \tag{4.107}$$

У складу са претходним објашњењем реалности, овај интеграл је просечна вредност позиције x која би се могла очекивати из великог броја мерења. У складу са нашом интуицијом, овај број би могао бити и просечна вредност позиције великог броја честица описаних истом таласном функцијом ψ. На пример, очекивање полупречника електрона у основном стању водониковог атома је просечна вредност коју добијамо мерењима великог броја водоникових атома[51].

Оператор импулса (4.31), посматран само дуж апсцисе биће $p_x = -i\hbar\partial_x$ и имаће средњу вредност

$$\langle p_x\rangle = \langle\psi|p_x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* p_x\psi\,dx. \tag{4.108}$$

Како је енергија слободне честице $E = \frac{p^2}{2m}$, очекивање енергије дуж x-осе је

$$\langle E_x\rangle = \langle\psi|E_x|\psi\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\,dx, \tag{4.109}$$

за слободну честицу.

[50]Уместо уобичајеног $A^\dagger$ пишемо A^*.
[51]Цитат из уџбеника квантне механике [15].

4.11 Опсервабле

Опсервабла је динамичка варијабла која се може мерити. У квантној механици свакој динамичкој варијабли (позицији, импулсу, енергији) придружен је хермитски оператор, $\tilde{A}$, који делује на таласне функције ψ (комплексне вероватноће) са сопственим вектором ψ_a коме одговара могућа[52] сопствена вредност a динамичке варијабле, тако да важи једначина

$$\tilde{A}\psi_a = a\psi_a. \tag{4.110}$$

Тада, средња вредност (по сопственим векторима) износи:

$$\langle\tilde{A}\rangle = \int \psi_a^* \tilde{A}\psi_a \, dx = \int \psi_a^* a\psi_a \, dx = a\int \psi_a^*\psi_a = a\|\psi_a\|^2, \tag{4.111}$$

тј. $\langle\tilde{A}\rangle = a$ када су таласне функције нормиране на јединицу. Налажење дате варијабле у датом стању, сопственом вектору ψ_a, је сигуран догађај када је $\|\psi_a\|^2 = 1$.

Приметимо, ако сопствена вредност a не би била реалан број (већ комплексан), онда опсервабла коју она представља не би била реална, не би била мерљива. Обрнуто, ако је опсервабла мерљива, тада је $a \in \mathbb{R}$ па је оператор $\tilde{A}$ хермитски. Себи коњугован оператор, $\tilde{A}^* = \tilde{A}$, је такође хермитски.

Пример 4.11.1. *Показати да је средња вредност квадрата себи коњугованог оператора позитиван број.*

Решење. Означимо са dx инфинитезимални елеменат простора X. У изразу

$$\langle\tilde{A}^2\rangle = \frac{\int_X \psi^*\tilde{A}^2\psi \, dx}{\int_X \psi^*\psi \, dx}$$

називник је позитиван број. Када је простор нормиран тада је $\int_X \psi^*\psi \, dx = \|\psi\|^2 = 1$. Из дефиниције себи коњугованог оператора $\tilde{A}$ следи:

$$\int_X \psi^*\tilde{A}\tilde{A}\psi \, dx = \int_X (\tilde{A}\psi)^*(\tilde{A}\psi) \, dx = \int |\tilde{A}\psi|^2 dx > 0,$$

тј. $\langle\tilde{A}^2\rangle > 0$, а то је и требало показати. □

У случају да је таласна функциа комбинација сопствених стања, рецимо

$$\psi = \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2, \tag{4.112}$$

тако да је:

$$\tilde{A}\psi_1 = a_1\psi_1, \quad \tilde{A}\psi_2 = a_2\psi_2, \tag{4.113}$$

тада је очекивана вредност датог (хермитског) оператора:

$$\langle\tilde{A}\rangle = \int \psi^*\tilde{A}\psi \, dx =$$

$$= \int (\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)^*\tilde{A}(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)$$

[52]Један сопствени вектор датог оператора може имати више сопствених вредности.

$$= \int (\lambda_1^* \psi_1^* + \lambda_2^* \psi_2^*)(\lambda_1 a_1 \psi_1 + \lambda_2 a_2 \psi_2)$$

$$= a_1|\lambda_1|^2 \int \psi_1^* \psi_1 \, dx + a_2 \lambda_1^* \lambda_2 \int \psi_1^* \psi_2 \, dx + a_1 \lambda_2^* \lambda_1 \int \psi_2^* \psi_1 \, dx + a_2|\lambda_2|^2 \int \psi_2^* \psi_2 \, dx.$$

Према томе, када су вектори ψ_1, ψ_2 ортонормирани (узајамно окомити и јединичних норми), биће

$$\langle \tilde{A} \rangle = a_1|\lambda_1|^2 + a_2|\lambda_2|^2, \tag{4.114}$$

Међутим, сопствени вектори хермитског оператора увек могу бити ортонормирани.

Покажимо да су (различити) сопствени вектори ψ_1 и ψ_2 хермитског оператора $\tilde{A}$ узајамно окомити. Нека важи (4.113). На два начина израчунавамо (сопствене вредности су реалне):

$$\langle \psi_2 | \tilde{A} \psi_1 \rangle = a_1 \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle, \quad \langle \psi_2 | A \psi_1 \rangle = \langle A \psi_2 | \psi_1 \rangle = a_2 \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle,$$

и одузимамо добијене једнакости

$$(a_2 - a_1) \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = 0. \tag{4.115}$$

Једно решење ове једначине је

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = 0, \quad a_1 \neq a_2. \tag{4.116}$$

Дакле, различите сопствене функције хермитског оператора $\tilde{A}$ су ортогоналне, ако су им сопствене вредности различите. За друго решење једначине (4.115), тзв. случај *дегенерације* када су сопствене вредности једнаке, можемо претпоставити да је $\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle$ реалан број (увек се могу наместити фазе да то буде). Пошто било која линеарна комбинација ψ_1 и ψ_2 има исту сопствену вредност, свеједно нам је коју ћемо узети. Међутим, ми циљамо на оне које су узајамно ортогоналне, на пример:

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2). \tag{4.117}$$

За њих налазимо:

$$\langle \psi_+ | \psi_- \rangle = \frac{1}{2}(1 - \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle + \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle - 1) = 0,$$

јер је скаларни производ реалан број (оператор је хермитски). Дакле, постоје ортогоналне сопствене функције чак и у случају једнаких сопственх вредности (дегенерације). Даље се једноставно наставља рад као да је сваки пар сопствених вектора хермитског оператора ортогоналан. Нормирање постижемо преласком $\psi \to \psi / \|\psi\|$. Према томе, увек можемо имати (4.114).

Резимирајмо. Очекивање оператора $\tilde{A}$ дато је изразом

$$\langle \tilde{A} \rangle = \int \psi^* \tilde{A} \psi \, dx, \tag{4.118}$$

као у случају оператора координате (4.107). Вредности физичких опсервабли (положаја, енергије, густине, ...) морају бити реалне, па $\langle \tilde{A} \rangle$ мора бити реално. То значи да је $\langle \tilde{A} \rangle = \langle \tilde{A}^* \rangle$, а оператори који задовољавају тај услов, односно (4.106), називају се хермитским.

Пример 4.11.2. *Показати да су сопствене вредности хермитског оператора реалне.*

Решење. Покажимо то на начин сличан (4.111):

$$\int \psi_a^* \tilde{A}\psi_a \, dx = \int \psi_a (\tilde{A}\psi_a)^* \, dx,$$

$$a \int \psi_a^* \psi_a \, dx = a^* \int \psi_a \psi_a^* \, dx,$$

$$(a - a^*) \int |\psi_a|^2 = 0,$$

па како је $|\psi_a|^2 > 0$, мора бити или $a = a^*$ или $\psi_a = 0$. Пошто нула функција није прихватљива за сопствену, a је реалан број. □

Пример 4.11.3. *Сопствени вектори хермитског оператора су ортогонални.*

Решење. Покажимо то на начин сличан (4.115):

$$\int \psi_a^* \tilde{A}\psi_b \, dx = \int \psi_b (\tilde{A}\psi_a)^* \, dx,$$

$$b \int \psi_a^* \psi_b \, dx = a^* \int \psi_b \psi_a^* \, dx,$$

$$(b - a) \int \psi_a^* \psi_b^* = 0,$$

јер је $a = a^*$ показано у претходном примеру. Када је $b \ne a$, биће $\int \psi_a^* \psi_b \, dx = 0$. У случају дегенерације (више од једне сопствене функције са истом сопственом вредношћу), ми бирамо сопствене функције тако да буду ортогоналне.

Рецимо, ако је $\tilde{A}\psi_a = a\psi_a$ и $\tilde{A}\psi_b = a\psi_b$, тражимо $\psi_c = \psi_b + \lambda\psi_a$ тако да буде:

$$\int \psi_a^* \psi_c \, dx = 0,$$

$$\int \psi_a^* (\psi_b + \lambda\psi_a) \, dx = 0,$$

$$\int \psi_a^* \psi_b \, dx + \lambda \int \psi_a^* \psi_a \, dx = 0,$$

$$\lambda = -\int \psi_a^* \psi_b \, dx / \int \psi_a^* \psi_a \, dx.$$

Тада су ψ_a и ψ_c ортогоналне сопствене фукције датог хермитског оператора. То је заправо почетак Грам-Шмитовог поступа ортогонализације (4.91), који се даље може користити у још сложенијим случајевима. □

Слично (4.112), свака таласна функција ψ се може писати као линеарна комбинација ортонормираних сопствених функција $\psi_1, \psi_2, \dots$ било којег оператора

$$\psi = \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \dots, \tag{4.119}$$

тако да је, слично (4.114), очекивана вредност опсервабле коју она представља

$$\langle \tilde{A} \rangle = \sum_k a_k |\lambda_k|^2. \tag{4.120}$$

То је *принцип суперпозиције* који је основа свих разлика између квантне и класичне механике. Чињеница да честицу описујемо таласима чије се амплитуде (вероватноће) могу додавати и комбиновати у мешана стања је нешто што нема аналогију у класичној механици.

Пример 4.11.4. *Показати да је* $\psi = \exp(ikx)$, $i = \sqrt{-1}$, $k = const.$ *сопствена функција са сопственом вредношћу* $p = \hbar k$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, *оператора импулса* $\tilde{p}_x = -i\hbar\partial_x$.

Решење. То следи из $\tilde{p}\psi = p\psi$, а затим:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}e^{ikx} = \hbar k e^{ikx},$$

и упоређивањем. □

Како вредности $p = \hbar k$ немају ограничења, то сопствених вредности и сопствених функција $\psi = \exp(ikx)$ има онолико колико и комплексних бројева k. За реалне бројеве k и $\exp(ikx)$, $\exp(-ikx)$, $\exp(kx)$, $\exp(-kx)$ су такође сопствена стања $\tilde{p}_x$. Узимањем парцијалних извода се лако провераваују и следећа тврђења.

Када су $-\hbar k_\xi$ за $\xi \in \{x, y, z\}$ у правоуглим Декартовим координатама, сопствене вредности оператора $\tilde{p}_\xi$, где су вектори $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ и $\mathbf{r} = (x, y, z)$, тада је таласна функција $\psi(x, y, z) = \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ сопствена функција сваког тих оператора. Функције $\sin(k_x x)$, $\sin(k_y y)$ и $\sin(k_z z)$ су сопствена стања оператора $\tilde{p}^2 = \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2$ са сопственом вредношћу $\hbar^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$. Функција $\psi = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ је сопствена функција оператора $\tilde{p}^2 = \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2$. То су задачићи познати са курса квантне механике[53].

За следећу групу примера узмимо експеримент Стерна и Герлаха на слици 4.5. Рецимо да знамо да z компонента спина честице износи $S_z = \frac{1}{2}\hbar$. Квантном систему придружимо стање $|S_z = \frac{1}{2}\hbar\rangle$, или још једноставније писано $|+\rangle$. На сличан начин придружујемо стање $|-\rangle$ компоненти z спина са измереном вредношћу $-\frac{1}{2}\hbar$.

Приметимо да се два наведена стања узајамно искључују. Дакле, она представљају узајамно дисјунктне случајне догађаје, па им вероватноће можемо просто сабирати. Друга напомена. Опсервабла је мерљива величина, али сам чин мерења може да ненаруши или да наруши стање које се мери. У случају експеримента Стерн-Герлаха, мерење након мерења даће опет исти резултат, што значи да ће стање преживети интеракције мерења. Насупрот томе, мерење које би бројало фотоне у неком резонатору мења мерено стање, тако да показује све мањи и мањи број преосталих фотона.

Ако је атом припремљен у неком произвољном почетном стању $|S\rangle$, тада ће скаларни производ показати вероватноћу налажења тог у неком другом стању $|S'\rangle$:

$$\langle S'|S\rangle = \langle S'|+\rangle\langle +|S\rangle + \langle S'|-\rangle\langle -|S\rangle, \tag{4.121}$$

што након краћења даје

$$|S\rangle = |+\rangle\langle +|S\rangle + |-\rangle\langle -|S\rangle, \tag{4.122}$$

а то значи да свако стање спина атома може бити интерпретирано као вектор изражен линеарном комбинацијом стања $|\pm\rangle$. Ова два стања чине потпуну и ортонормирану базу одговарајућег система.

[53]На студију математике у Београду давних 80', мени је то био изборни 3-семестрални предмет код проф. Федора Хебута и асистента проф. Игора Ивановића.

Даље настављамо придружујући опсервабли S_z хермитски оператор, матрицу $\hat{S}_z$, такву да је $\hat{S}_z|\pm\rangle = \pm\frac{1}{2}\hbar|\pm\rangle$, што у бази $(|+\rangle, |-\rangle)$ даје:

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{S}_z|+\rangle & \langle +|\hat{S}_z|-\rangle \\ \langle -|\hat{S}_z|+\rangle & \langle -|\hat{S}_z|-\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.123}$$

односно $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_3$, где је $\hat{\sigma}_3$ Паулијева матрица из (3.3). На овај начин конструишемо хермитски оператор који представља посебну опсерваблу.

Уопште, квантно мерење формализујемо узимајући ортонормирану базу $|\psi_k\rangle$, или ознаке вектора ψ_k, за $k = 1, \dots, n$, и у тој бази пишемо произвољан вектор у облику

$$\psi = a_1\psi_1 + \dots + a_n\psi_n, \tag{4.124}$$

при чему су базом једнозначно одређени коефицијенти $a_k \in \mathbb{C}$. Резултат мерења је нека величина λ_k (то је реалан број који прочитамо из мерног уређаја) са вероватноћом $|a_k|^2$. Чином мерења, квантни систем спадне (колабира) на стање ψ_k. Низ бројева λ_k само је начин саопштавања резултата мерења у k-ом исходу, али са којим можемо конструисати хермитску матрицу

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|. \tag{4.125}$$

У бази $|\psi_k\rangle$, ово је дијагонална матрица са бројевима λ_k на дијагонали.

На пример, желимо да измеримо неки кјубит[54] у бази $|+\rangle$, $|-\rangle$, са мерним резултатима $+1$ и -1 редом. Одговарајуће „мерење“ опсервабле је матрица:

$$\hat{M} = (+1)|+\rangle\langle+| + (-1)|-\rangle\langle-| =$$
$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$
$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.126}$$

Из конструкције се види да $\hat{M}$ има сопствене векторе $|+\rangle$, $|-\rangle$ са сопственим вредностима 1 и -1. То је поступак којим смо добили и (4.123), при чему овде „кјубит“ тамо значи „спин“, овде имамо прву, тамо трећу Паулијеву матрицу.

Уопште, кјубити су двочлана стања квантног система. То могу бити два стања електрона у атому водоника, $|0\rangle$ - основним стањем и $|1\rangle$ - побуђеним. Електрон може бити у једном од та два стања, или у њиховој суперпозицији (линеарној комбинацији). Стања кјубита се могу писати као вектори $\binom{\alpha}{\beta} \in \mathbb{C}^2$, или у Дираковој нотацији:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{4.127}$$

Линеарна суперпозиција $|\psi\rangle$ изражава сва могућа стања електрона, а мерење издваја једно конкретно када добијамо један класичан бит информације, 0 или 1. Најпростије мерење је у основној бази, са исходом 0 вероватноће $|\alpha|^2$, а 1 вероватноће $|\beta|^2$.

Мерење мења стање кјубита и оставља га у измереном стању. Понављање мерења не даје додатну информацију, јер је претходна неизвесност квантног стања неповратно смањена.

[54] енг. qubit - квантна информација од једног бита

4.12 Квантна спрегнутост

Квантна *спергнутост* или уплетеност (енг. entanglement) званично је физички феномен који се дешава када пар или група честица интерагују на начин да квантно стање појединe честице не може бити описано независно од осталих, чак и када су те честице међусобно веома удаљене, те се квантни систем мора описивати само као целина.

4.12.1 АПР парадокс

Спрегнути аспект квантних система је откривен у раду [16] Ајнштајна, Подолског и Розена из 1935. године: Можемо ли квантно-механички опис физичке реалности сматрати комплетним? Тај рад је заправо био покушај рушења темеља квантне механике, који се временом (експериметима) окренуо у нешто друго.

Аутори АПР су посматрали два квантна система. Сопствене вредности $a_1, a_2, a_3, \dots$ неке физичке величине A које се односе на први систем и одговарајуће сопствене функције другог $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \dots$, где x_1 стоји за варијабле које описују први систем. Тада се Ψ коју сматрамо функцијом од x_1, може писати

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_k \psi_k(x_2) u_k(x_1), \tag{4.128}$$

где x_2 стоји за варијабле употребљене за опис другог квантног система. Овде су $\psi_k(x_2)$ коефицијенти развоја функције Ψ у ред ортогоналних функција $u_k(x_1)$. Нека је A величина која је мерена и добијена вредност је a_k.

Закључујемо да је након мерења први систем остао у стању са таласном функцијом $u_k(x_1)$, а да је други систем остао у стању са таласном функцијом $\psi_k(x_2)$. То је процес редукције таласног пакета: таласни пакет дат бесконачним редом (4.128) је редукован на један сабирак $\psi_k(x_2) u_k(x_1)$.

Међутим, скуп функција $u_k(x)$ одређен је избором физичке величине A. Ако, уместо ове изаберемо другу величину, рецимо B, са сопственим вредностима $b_1, b_2, b_3, \dots$ и сопственим функцијама $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \dots$, уместо претходног имамо развој

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_j \varphi_j(x_2) v_j(x_1), \tag{4.129}$$

где су φ_j нови коефицијенти. Ако сада меримо величину B и нађемо вредност b_j, закључићемо да након мерења први систем остаје у стању датом са $v_j(x_1)$ а други систем у стању датом са $\varphi_j(x_2)$.

Према томе, у два различита мерења првог система, други може бити остављен у стању са две различите таласне функције. Са друге стране, како у време мерења два система више не размењују дејства, то не постоји реална промена другог система узрокована дејством првог, пишу аутори поменутог рада. То сматрају просто последицом онога што називамо одсуством преноса информације између два система. Испада да је тада могуће доделити две различите таласне функције (ψ_k и φ_j) истој реалности (другом систему након интеракције са првим).

Даље се може десити, наводе, да су две таласне функције, ψ_k и φ_j, сопствене функције два некомутативна оператора физичких величина редом P и Q, импулса и положаја. Они затим изводе[55] данас добро познату релацију

$$\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P} = h/2\pi i, \tag{4.130}$$

[55] в. Неодређеност III - Квантна спрегнутост, 17. јуни 2016, www.academia.edu/26872543/

која је заправо Хајзенбергова релација неодређености положаја и импулса, писана помоћу оператора. У могућности да ψ_k и φ_j буду сопствене функције два некомутативна оператора који одговарају физичким величинама, аутори АПР виде парадокс.

Ометање опажања једне величине због опажања друге постаје недопустиво парадоксално, сматрају, када су та два опажања тако удаљени догађаји да нити информација брзином светлости не би могла стићи од једног до другог. Због лакоће којом алгебра квантне механике дозвољава сличне закључке, аутори АПР у самој основи те теорије виде контрадикцију из које се може изаћи: „јер је квантна механика некомплетна теорија са локално скривеним варијаблама“.

Ајштајн је снажно заступао идеју *локалности*, да су интеракције међу честицама или уопште физичким појавама могуће само ако су праћене просторно-временским преносом неког дејства или информације, од једне до друге. Тај пренос не може бити бржи од брзине светлости, а евентуално тренутно дејство на даљину ругајући се називао је „сабласним“ (енг. *spooky action at a distance*). Објашњавајући свој реализам рекао је: „Верујем да је Месец тамо где је чак и док га не гледам“, а за своје разумевање непотпуности квантне механике Ајнштајн је смислио следећи пример са рукавицама.

Замислимо да раздвојимо пар рукавица и да их ставимо у две идентичне кутије које затим помешамо. Једну кутију пошаљемо „далеко далеко“ а другу донесемо кући. Ми не знамо која је рукавица у кутији код куће, лева или десна, све док је не отворимо. Међутим, када отворимо ту кутију, истог тренутка сазнајемо и која је рукавица у оној другој кутији, ма како она тада била удаљена од нас. Таква нека нама непозната веза међу подсистемима мора да постоји у спрегнутом квантном систему, сматрао је Ајнштајн.

Неочекивано, али Ајнштајнов пример са рукавицама открива нам и управо супротне, стохастичке особине квантних појава. Рецимо, следеће поопштење тог примера даје увид у закон одржања „укупне количине неизвесности и информације“ затвореног система, који смо овде више пута помињали. Претпоставимо да имамо десет означених али иначе идентичних кутија са по једном лоптом. Не знамо која је лопта у којој кутији.

Вероватноћа да је посебна једна (од десет) лопти у првој кутији је $\frac{1}{10}$. Пре отварања те кутије имамо неизвесност количине $\ln 10$, а чином отварања сва та неизвесност постаје информација исте количине. Затим је вероватноћа неке посебне лопте у следећој кутији $\frac{1}{9}$, са неизвесношћу пре односно информацијом након отварања друге кутије $\ln 9$. Настављајући овај поступак отварања до претпоследње кутије (у последњој нема неизвесности), приметићемо да је збир свих информација

$$\ln 10 + \ln 9 + \dots + \ln 2 = \ln(10 \cdot 9 \dots 2) = \ln(10!).$$

Број „десет факторијел“, тј. $10! = 1 \cdot 2 \dots 10$ је број свих пермутација лопти по кутијама у почетном распореду. Логаритам тог броја $\ln 10!$ је неизвесност са почетка отварања која се на крају трансформисала у тачно једнаку количину информације.

Нити треба сумњати у објективност случајности у микро-свету, нити да природа следи наведену законитост математичке теорије информације. Напротив, можемо сматрати да због истих разлога долази до квантне спрегнутости. Када се реализује неизвесност, она прелази у информацију, а због одржања збира њих две, реализација случајности утиче на вероватноће нереализованих. То је разлог промена других особина датог квантног система због мерења једне од њих.

Овакво тумачење квантне спрегнутости није сасвим једнако званичном. То нарочито долази до изражаја са последицама које су скоро па непосредне за приметити, да не

кажем тривијалне. Наиме, „необичност“ Ајнштајновог „сабласног“ феномена деловања на даљину долази и од уобичајеног схватања времена као „логичног тока ствари“. Насупрот томе, квантној спрегнутости потребна је местимична *временска недоследност.* Временски след догађаја A па B, у горњем опису спрегнутости, не може имати исту снагу логике као импликација $A \Rightarrow B$. Оно што ствара нашу садашњост је насумична производња информације, а оно што произведену информацију чува у облику наше прошлости је (ограничен) закон одржања информације и ништа више. Нема гаранције да се неки прошли догађај А неће променити због будућег B, да би слабији закон одржања (саме) информације пропустио јачи закон одржања импулса[56].

Невероватну квантну спрегнутости, овако тумачену можемо препознати у разним иначе познатим и признатим налазима квантне механике. На пример, погледајте сада опет објашњење експеримента са два отвора уз слику 4.2. Следећи пример, наравно, су Хајзенбергове релације неодређености.

4.12.2 Релације неодређености

Хајзенберг[57] је открио своје релације неодређености мало пре 1927. године, а затим је формулисао и принцип неодређености такође назван по њему. Хајзенбергово откриће је данас темељ квантне механике. У најпознатијем облику принцип каже да није могуће нешто измерити без ремећења. Рецимо, покушавајући мерити позицију честице, ми морамо насумице мењати брзину честице.

У класичној механици честица увек има одређени положај (x) и *количину кретања* (p), коју називамо и *импулс*, мерено дуж *апсцисе* (x-осе):

$$p = mv, \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \tag{4.131}$$

где је m *маса* честице, v је *брзина* којом честица пређе пут дужине Δx за протекло време Δt. За разлику од материјалне честице, *талас* у класичној механици не може имати одређени положај и количину кретања. Што се положаја таласа тиче, он је најпрецизније одређен до износа таласне дужине, а што се тиче количине кретања, та величина једва да има смисла, као што нема смисла некаква маса таласа. Физичког смисла има само ток, кажемо и *флукс*, количине кретања и енергије.

У физици веома малих честица, најмање међу њима су *кванти* који имају двојну нарав, честичну и таласну. Те две нарави једнозначно повезују Де Брољеве[58] релације из 1923. године:

$$p = h/\lambda, \tag{4.132}$$

где је $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s Планкова константа. Таласна дужина микро-честице (Де Брољева таласна дужина) једнака је односу Планкове константе и интензитета њеног импулса.

Ову формулу су експериментално потвдили Девисон и Џермер 1927. године када су доказали дифракцију електрона на кристалима. Према хипотези Де Броља иста формула важи и у макро-свету али тада даје занемарљиве, немерљиве таласне дужине. На пример, пушчано зрно масе 50 g и брзине 662 m/s имаће Де Брољеву таласну дужину $\lambda = 2 \cdot 10^{-25}$ m.

---

[56] в. секцију 1.6 Таласи материје

[57] Werner Heisenberg (1901-1976), немачки теоријски физичар.

[58] Louis de Broglie (1892-1987), француски физичар.

Планк је 1900. године открио да хармонијски осцилатор мења енергију само у одређеним оброцима, у квантима енергије

$$E = h \cdot \nu \tag{4.133}$$

где је E израчена енергија, ν фреквенција осцилатора, а $h = 6,6261 \cdot 10^{-34}$ Js Планкова константа. За таласно кретање важи једнакост

$$\lambda\nu = v \tag{4.134}$$

где је λ таласна дужина а v брзина таласа. Ова једнакост важи и за таласе светлости у вакууму чија брзина је $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s.

Из Ајнштајнове релације која повезује енергију са масом m

$$E = m \cdot c^2 \tag{4.135}$$

добијамо релативистичку масу фотона (честице светлости)

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \tag{4.136}$$

и количину кретања

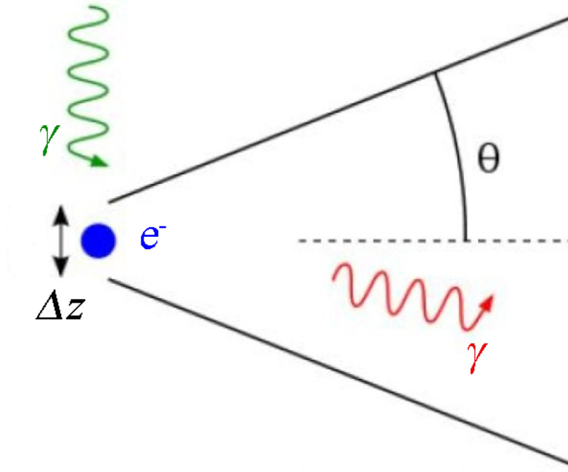
$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{4.137}$$

односно импулс фотона. Придруживање таласне дужине у последње две релације била је идеја Де Броља.

Ово је формула која важи за сва електромагнетна зрачења, редом од радио-таласа преко микро-таласа, инфрацрвених, видљиве светлости, ултравиолетних, затим x-зрака па до гама-зрака. Ове последње (γ-зраке), означавају електромагнетну радијацију из језгара као део радиоактивног процеса. Енергија нуклеарне радијације је екстремно висока јер настаје интензивним деловањем јаке нулеарне и електромагнетне силе, па им је таласна дужина екстремно мала. Због своје мале таласне дужине γ-зраке су веома згодно средство посматрања прецизних микроскопа. Фотон гама-зраке је заправо исто што и x-зраке, јер су оба електромагнетно зрачење. Различити називи се користе једноставно да би назначили различито порекло ових таласа. Типичне фреквенције гама-зрака су $\nu > 10^{20}$ Hz а типичне таласне дужине $\lambda < 10^{-12}$ m. Кванти њихове енергије су $E > 1$ MeV.

Мерећи положај електрона, када га гађамо γ-зраком, ми покрећемо процес размене информације[59] честица учесница. Одузимајући информацију о положају електрона, смањујемо му неодређеност места, повећавамо вероватноћу његовог положаја. Губитак за електрон је за нас (апаратуру) добитак. Током мерења положаја електрон предаје део своје информације о положају, чинећи тај положај извеснијим. Када би предао сву информацију о себи, он би тада и престао да постоји као посебна честица.

Са друге стране, да електрон приликом оваквог мерења не би сасвим нестао (преточио се у предате информације), он је морао преузимати информације од апаратуре. При томе је битно шта са чиме може комуницирати. Мерења тзв. Хајзенберговим микроскопом, на слици 4.7, која су резиме разних анализа, показују да електрон тада добија информацију о импулсу. Та је размена усклађена са губитком информације положаја и обрнута описаној. Једноставно речено, положај и импулс електрона су тако



Slika 4.7: Судар гама зраке γ и електрона e^-.

спрегнути да му описаним мерењем не можемо одузети једно а да он од нас не „украде" оно друго.

На поменутој слици приказан је Хајзенбергов микроскоп којим се помоћу гама-зраке γ утврђује положај Δz електрона e^-. Улазећа гама-зрака (одозго кривудава зелена) се након судара[60] са електроном расипа (црвена) под углом θ. Из класичне оптике следи да је тачност одређивања позиције електрона ограничена таласном дужином долазеће светлости. Према релацији (4.132) или $\lambda p = h$, биће

$$\Delta z \cdot \Delta p_z = h, \tag{4.138}$$

gde je Δz неодређеност положаја (апликате) електрона а Δp_z неодређеност његовог импулса (такође дуж z-осе).

Приметимо да се претходно тумачење и ово званично мало разликују. Разлика долази од употребе информације у претходном, због чега резултат (4.138) можемо схватити и као укупну количину информације и неизвесности у електрону, за коју важи претходно поменути закон одржања. Иначе, неодређености Δz и Δp_z су подцењене, па на десној страни (4.138) стављамо $\hbar = h/2\pi = 1,055$ Js. Прецизним мерењем (в. [18]) показује се да на десној страни ове једнакости може стајати и мањи број.

Када микроскоп поставимо дуж различитих координатних оса (Декартовог система $Oxyz$), добијамо Хајзенбергове релације неодређености по координатама:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \ge \frac{\hbar}{2}, \tag{4.139}$$

где су наведене одговарајуће неодређености положаја и импулса у правцима оса апсцисе, ординате и апликате. За „мешовите" производе нема таквог ограничења, па је на пример $\Delta x \cdot \Delta p_y \ge 0$.

Вектори неодређености положаја и импулса електрона били би:

$$\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad \Delta \mathbf{p} = (\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z), \tag{4.140}$$

[59] Мој опис, још увек незваничан.
[60] Званичан опис.

тако да претходне релације можемо писати помоћу скаларног производа:

$$\Delta\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{p} \ge \frac{3\hbar}{2}. \tag{4.141}$$

Знамо да се вектори положаја и импулса могу проширити за још по једну координату, на 4-димензионални простор-време инерцијалних система теорије релативности, а тиме се продужава и њихов скаларни производ. Ево како се то може извести.

Изаберимо смер апсцисе (x-осе). Како је сила (F) промена количине кретања (p) током времена (t), добијамо редом:

$$\Delta p = F\Delta t, \quad F\cdot\Delta x\cdot\Delta t \approx \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E\cdot\Delta t \approx \frac{\hbar}{2},$$

где је $\Delta E = F\Delta x$ неодређеност енергије (ΔE је рад силе F на путу Δx) а Δt је расположиво време за мерење енергије. На тај начин налазимо и четврту релацију неодређености

$$\Delta t\cdot\Delta E \ge \frac{\hbar}{2}. \tag{4.142}$$

Отуда

$$\Delta x\cdot\Delta p_x + \Delta y\cdot\Delta p_y + \Delta z\cdot\Delta p_z + \Delta t\cdot\Delta E \ge 2\hbar. \tag{4.143}$$

Ово се може интерпретирати и као скаларни производ вектора са четири компоненте, а затим и као врста (поопштене Шенонове) информације. Међутим, том врстом информације се овде не бавимо.

Пример 4.12.1. *Електрон се креће дуж апсцисе. Ако је неодређеност положаја електрона $1\,\mu m$, колика се чини грешка при одређивању његове брзине?*

Решење. Из масе електрона $m = 9,1\cdot 10^{-11}$ kg, неодређености његовог положаја $\Delta x = 1\,\mu\text{m} = 10^{-6}$ m и релације неодређености $\Delta x\cdot\Delta p \ge \frac{\hbar}{2}$ следи:

$$\Delta v \ge \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{1,055\cdot 10^{-34}\text{ J s}}{2\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\text{ kg }\cdot 10^{-6}\text{ m}} = 57,967\text{ m s}^{-1}$$

јер је $\Delta p = m\Delta v$. □

Пример 4.12.2. *Електрон се креће кроз маглену комору остављајући траг ширине 0,3 милиметра. Колика је најмања неодређеност његове брзине?*

Решење. Из $\Delta x = 0,3$ mm $= 0,3\cdot 10^{-3}$ m, масе $m = 9,1\cdot 10^{-11}$ kg и $\Delta x\cdot\Delta p \ge \frac{\hbar}{2}$, добијамо неодређеност брзине електрона:

$$\Delta v \ge \frac{\hbar}{2m\Delta x} = 0,19\text{m/s}$$

јер је $\Delta p = m\Delta v$ као и у претходном примеру. □

Пример 4.12.3. *Колико траје стање система чија енергија је неодређена за 80 GeV? Колики би приближно пут за то време прешла честица која се креће брзином блиском брзини светлости?*

Решење. Из $\Delta E = 80$ GeV $= 1,2\cdot 10^{-8}$ J и релације $\Delta E\cdot\Delta t \ge \frac{\hbar}{2}$ следи:

$$\Delta t \ge \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{1,055\cdot 10^{-34}\text{ J s}}{2\cdot 1,28\cdot 10^{-8}\text{ J}} = 4,12\cdot 10^{-27}\text{ s}.$$

Отуда је пређени пут $\Delta x = c\Delta t = 3\cdot 10^8$ m/s $\cdot 4,12\cdot 10^{-27}$ s $\approx 1,23\cdot 10^{-18}$ m. □

4.12.3 Принцип неодређености

Видели смо да помоћу бра-кет вектора очекивану вредност линеарног оператора $\tilde{A}$ у квантном простору, можемо писати

$$\langle\tilde{A}\rangle = \langle\psi|\tilde{A}|\psi\rangle. \tag{4.144}$$

Када имамо и други линеарни оператор $\tilde{B}$ који не комутира са првим, њихов комутатор не исчезава

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} \neq 0, \tag{4.145}$$

што потврђујемо егзистенцијом неког вектора ψ таквог да $[\tilde{A}, \tilde{B}]\psi \neq 0$. Аналогно неодређености положаја, дефинишимо оператор

$$\Delta\tilde{A} \equiv \tilde{A} - \langle\psi|\tilde{A}|\psi\rangle. \tag{4.146}$$

Други сабирак је број $\langle\tilde{A}\rangle$. За дати вектор $|\psi\rangle$, разлика $\Delta\tilde{A}|\psi\rangle$ представља одступање резултата $\tilde{A}|\psi\rangle$ од средње вредности $\langle\tilde{A}\rangle|\psi\rangle$, па се само $\Delta\tilde{A}$ схвата као одступање оператора $\tilde{A}$ од своје средње вредности.

Производ ових разлика два оператора је

$$\Delta\tilde{A}\Delta\tilde{B} = \frac{1}{2}[\Delta\tilde{A}, \Delta\tilde{B}] + \frac{1}{2}\{\Delta\tilde{A}, \Delta\tilde{B}\}, \tag{4.147}$$

где су изрази:

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A}, \quad \{\tilde{A}, \tilde{B}\} = \tilde{A}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{A} \tag{4.148}$$

комутатор и антикомутатор. Комутатор два хермитска оператора је анти-хермитски, јер је (уместо $\tilde{T}^\dagger$ пишемо $\tilde{T}^*$):

$$[\tilde{A}, \tilde{B}]^* = (\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A})^* = \tilde{B}^*\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{B}^* = \tilde{B}\tilde{A} - \tilde{A}\tilde{B} = -[\tilde{A}, \tilde{B}].$$

Слично, антикомутатор два хермитска оператора је хермитски. Проверите, сопствене вредности хермитског оператора су реалне, анти-хермитског имагинарне.

Варијанса (4.99), овде је очекивање квадрата оператора $\Delta\tilde{A}$:

$$\langle(\Delta\tilde{A})^2\rangle = \langle(\tilde{A} - \langle\tilde{A}\rangle)^2\rangle = \langle\tilde{A}^2 - 2\tilde{A}\langle\tilde{A}\rangle + \langle\tilde{A}\rangle^2\rangle = \langle\tilde{A}^2\rangle - 2\langle\tilde{A}\rangle\langle\tilde{A}\rangle + \langle\tilde{A}\rangle^2,$$

$$\langle(\Delta\tilde{A})^2\rangle = \langle\tilde{A}^2\rangle - \langle\tilde{A}\rangle^2. \tag{4.149}$$

Приметимо да из $\tilde{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ следи $\langle\psi|\tilde{A}|\psi\rangle = a\langle\psi|\psi\rangle = a^2$, а са друге стране да је и $(\langle\psi|\tilde{A}|\psi\rangle)^2 = a^2$, па је $\langle\Delta\hat{A}\rangle = 0$. Сопствено стање оператора $\hat{A}$ има одређену вредност чије статистичко расипање (варијанса) је нула.

Сада можемо доказивати Хајзенбергову неједнакост за било која два линеарна оператора $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2. \tag{4.150}$$

Она се назива Хајзенберговим принципом неодређености.

Пример 4.12.4. *Доказати (4.150) помоћу Кошијеве неједнакости.*

Решење. У израз iii. примера 4.5.1 ставимо $|u\rangle = \Delta\tilde{A}|\psi\rangle$ и $|v\rangle = \Delta\tilde{B}|\psi\rangle$. Добијамо:

$$\langle u|u\rangle\langle v|v\rangle \ge |\langle u|v\rangle|^2,$$

$$\langle(\Delta\tilde{A})^2\rangle\langle(\Delta\tilde{B})^2\rangle \ge |\langle\Delta\tilde{A}\Delta\tilde{B}\rangle|^2.$$

Операторе пишемо у базама где су они дијагонални, а онда развијамо $|\psi\rangle$ по базним векторима који дијагонализирају оператор, па израчунамо збир. Када напишемо $\Delta\tilde{A}\Delta\tilde{B}$ као збир два сабирка од којих је један чисто реалан а други чисто имагинаран, на начин (4.147), излази да је

$$|\Delta\tilde{A}\Delta\tilde{B}|^2 = \frac{1}{4}|\langle[\tilde{A},\tilde{B}]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\tilde{A},\hat{B}\}\rangle|^2.$$

Како су обадва сабирка на десној страни једнакости ненегативни, следи неједнакост (4.150), а то је оно што је требало доказати. □

Рекли смо да нас некомутативност оператора не изненађује. На пример, коначна грађевина неће бити иста када се прво озида спрат па постави кров као када се прво постави кров па зида спрат. Овде некомутативност оператора над векторима, вероватноћама ψ, наглашава једну занимљиву особину неизвесности. Дејство на један аспект квантног стања може му променити неки други, али без преноса информације. Дакле, није тачно оно распрострањено мишљење у физци данас да је свака интеракција неки пренос информације и обрнуто.

Пример 4.12.5. *Показати да за оператор положаја и импулса важи:*

$$\sqrt{\langle(\Delta\tilde{x})^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta\tilde{p})^2\rangle} \ge \frac{\hbar}{2}, \tag{4.151}$$

Решење. Оператори положаја и импулса су $\tilde{x} = x$ и $\tilde{p} = -i\hbar\partial_x$. За њихов комутатор важи

$$[\tilde{x},\tilde{p}]\psi = -i\hbar x\partial_x\psi + i\hbar\partial_x(x\psi) = +i\hbar\psi,$$

а отуда $[\tilde{x},\tilde{p}] = i\hbar$. Релација (4.150) постаје (4.151), независно од ψ. □

Чак нам и није потребна квантна механика да на начин из примера изведемо релације неодређености (4.143). У класичној механици је енергија E динамичка варијабла, попут положаја x, што значи да Хамилтонијан $H(x,E;p,t) = H_0(x,p;t) - E$ може зависити само од времена t, као и од импулса p. Хамилтонове једначине кретања:

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial H/\partial p, & \dot{p} = -\partial H/\partial q, \\ \dot{E} = \partial H/\partial t, & \dot{t} = -\partial H/\partial E, \end{cases} \tag{4.152}$$

нам кажу да су, заиста, енергија E и време t канонски коњуговане варијабле[61] попут положаја q и импулса p.

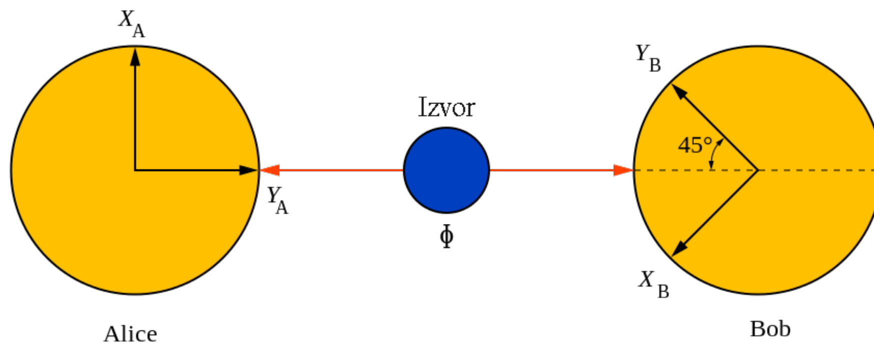
[61]Енергија је импулс у правцу времена: `http://physics.stackexchange.com/questions/16812/energy-is-actually-the-momentum-in-the-direction-of-time`

4.13 Белов допринос

Две деценије након открића АПР парадокса, појавио се Белов[62] рад: О Ајнштајн-Подолски-Розен парадоксу (в. [17]). То је заправо теорема у којој се на само четири странице утврђује да: „Није могућа физичка теорија локалних скривених варијабли која би могла репродуковати сва предвиђања квантне механике". Главна претпоставка коју је Бел у том раду оспорио била је Ајнштајнова претпоставка (из 1949.): „да су просторно раздвојени системи независни". Свој доказ је поделио у три дела.

4.13.1 Белова теорема

1. **Формулација.** Нека је дат пар спрегнутих честица (Alice & Bob) са спином $\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$ који могу узети по једну од вредности $\pm\frac{1}{2}$. То могу бити два електрона испаљена из истог извора у два супротна смера, као на слици[63] 4.8. Мерење (рецимо Стерн-Герлаховим магнетима) њихове компоненте спина еквивалентно је скаларном производу $\vec{\sigma}\cdot\vec{u} = \pm 1$, где је $\vec{\sigma} \in \{\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2\}$ а $\vec{u}$ је неки јединични вектор. Ако је за прву честицу овај производ $+1$ онда је за другу -1 и обрнуто.



Slika 4.8: Два електрона испаљена из истог извора.

Према Ајнштајновој претпоставци (независност просторно одвојених система), ако се два мерења обаве када су честице на великој удаљености, оријентација једног спина неће утицати на оријентацију другог. Ако мерећи један можемо предвидети резултат другог спина, то ће друго мерење бити предефинисано. Како иницијална квантно механичка таласна функција не одређује резултат појединог мерења, тај ће нам вишак дефинисаности пружити додатне податке о датом стању.

Нека су поменуте спецификације за комплетирање изражене групом параметара λ. Небитно је да ли λ представља једну или више варијабли, или чак скуп функција, и да ли су те варијабле дискретне или континуалне. Резултат A мерења $\vec{\sigma}_1\cdot\vec{a}$ одређен је јединичним вектором $\vec{a}$ и λ, а резултат B мерења $\vec{\sigma}_2\cdot\vec{b}$ на исти начин одређен је вектором $\vec{b}$ и λ, при чему је:

$$A(\vec{a},\lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b},\lambda) = \pm 1. \tag{4.153}$$

[62] John Stewart Bell (1928-1990), ирски физичар.
[63] Wikipedia: Bell's theorem

Главна Ајнштајнова претпоставка је да је резултат B за честицу 2, не зависи од поставке $\vec{a}$ магнета за честицу 1, нити A зависи од $\vec{b}$.

Ако је $\rho(\lambda)$ вероватноћа дистрибуције λ тада средња вредност (математичко очекивање) производа две компоненте $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ и $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ износи

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)\, d\lambda. \tag{4.154}$$

То би морало бити једнако очекиваној вредности квантне механике, за *синглет* стање (када је збир свих спинова нула)

$$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}\ \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \tag{4.155}$$

Али, показаће се да је то немогуће.

Можда се чини згоднија формулација у којој се скривене варијабле раздвајају у два скупа, при чему A зависи од једног а B од другог, али приметимо да је тај начин садржан у наведеном, јер λ стоји за било који број варијабли, а зависности A и B немају ограничење. Онако како Ајнштајн замишља комплетну физичку теорију, скривене варијабле имају динамичко значење закона кретања. Наше λ се тада може сматрати као почетна вредност тих варијабли у неком датом почетном тренутку.

2. Објашњење. Доказ главног резултата је сасвим једноставан. Пре него што га видимо, требају нам нека разјашњења.

Прво, немамо тешкоћа у давању скривеној варијабли вредност измереног спина једне честице. Претпоставимо да имамо честицу са спином пола (у чистом стању спина) означеном јединичним вектором $\vec{p}$. Нека скривена варијабла буде рецимо неки јединични вектор $\vec{\lambda}$ са униформном дистрибуцијом вероватноће по хемисфери $\vec{\lambda} \cdot \vec{p} > 0$. Нека резутат мерења компоненте $\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$ буде

$$\operatorname{sign}(\vec{\lambda} \cdot \vec{a}'), \tag{4.156}$$

где је $\vec{a}'$ неки јединични вектор који зависи од $\vec{a}$, вектор $\vec{p}$ ће успут бити одређен, а функција sign() даје вредност $+1$ или -1 зависно од знака аргумента. То заправо оставља резултат неодређеним када је $\vec{\lambda} \cdot \vec{a} = 0$, пошто је тада вероватноћа нула он нас и не занима. Узимање просека по $\vec{\lambda}$ даје

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \rangle = 1 - \frac{2\theta'}{\pi}, \tag{4.157}$$

где је θ' угао између $\vec{a}'$ и $\vec{p}$. Претпоставимо да се $\vec{a}'$ добија из $\vec{a}$ ротацијом према $\vec{p}$ све док

$$1 - \frac{2\theta'}{\pi} = \cos\theta, \tag{4.158}$$

где је θ угао између $\vec{a}$ и $\vec{p}$. Тада имамо жељени резултат

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \rangle = \cos\theta. \tag{4.159}$$

Тако у овом једноставном случају нема тешкоћа да се резултат сваког мерења одреди помоћу једне екстра варијабле и да статистичко понашање квантне механике дође до изражаја јер је вредност те варијабле непозната.

Друго, нема тешкоћа у добијању (4.154) и (4.155):

$$\begin{cases} P(\vec{a},\vec{a}) = -P(\vec{a},-\vec{a}) = -1, \\ P(\vec{a},\vec{b}) = 0 \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0. \end{cases} \tag{4.160}$$

На пример, нека λ буде вектор $\vec{\lambda}$, са униформном вероватноћом дистрибуције у свим правцима и узмимо:

$$\begin{cases} A(\vec{a},\vec{\lambda}) = \text{sign}(\vec{a}\cdot\vec{\lambda}), \\ B(\vec{a},\vec{b}) = -\text{sign}(\vec{b}\cdot\vec{\lambda}). \end{cases} \tag{4.161}$$

Отуда

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -1 + \frac{2}{\pi}\theta, \tag{4.162}$$

где је θ угао између $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а за (4.162) важе особине (4.160). Ради поређења, размотримо резултат једне модификоване теорије[64] у којој је чисто синглет стање током времена замењено неком изотропном мешавином стања, са функцијом корелације

$$-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{4.163}$$

Можда је теже у експерименту разликовати (4.162) од (4.155) него (4.163) од (4.155).

За разлику од (4.155), функција (4.162) није стационарна у минималној вредности -1 (када је $\theta = 0$). Видећемо да је то карактеристика функција типа (4.154).

Треће, нема тешкоћа у репродуковању квантно механичке корелације (4.155) ако је резултатима A и B дозвољено да зависе од $\vec{b}$ и $\vec{a}$ редом, као и од $\vec{a}$ и $\vec{b}$. На пример, заменимо $\vec{a}$ у (4.161) са $\vec{a}'$, добијеним ротацијом $\vec{a}$ према $\vec{b}$ све док

$$1 - \frac{2}{\pi}\theta' = \cos\theta, \tag{4.164}$$

где је θ' угао између $\vec{a}'$ и $\vec{b}$. Међутим, за дате вредности скривених варијабли, резултат мерења једним магнетом зависи од поставке другог магнета, а то је управо оно што желимо да избегнемо.

3. Контрадикција. Сада ћемо доказати главни резултат. Зато што је ρ нормализована расподела вероватноћа

$$\int \rho(\lambda)\,d\lambda = 1, \tag{4.165}$$

а због особина (4.153), P у (4.154) не може бити мање од -1. Оно може достићи -1 за $\vec{a} = \vec{b}$ само када је

$$A(\vec{a},\lambda) = -B(\vec{a},\lambda) \tag{4.166}$$

осим ако скуп тачака λ има вероватноћу нула. Са тиме, (4.154) можемо писати

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\int \rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)\,d\lambda. \tag{4.167}$$

Отуда за неки други јединични вектор $\vec{c}$ имамо

$$P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) = -\int \rho(\lambda)[A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]\,d\lambda =$$

[64] D. Bohm, Y. Aharonov, Phys. Rev. 108, 1070(1957).

$$= \int \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) A(\vec{b},\lambda)[A(\vec{b},\lambda) A(\vec{c},\lambda) - 1]\, d\lambda,$$

па користећи (4.153) налазимо

$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}| \le \int [1 - A(\vec{b},\lambda) A(\vec{c},\lambda)]\, d\lambda. \tag{4.168}$$

Други сабирак на десној страни је $P(\vec{b},\vec{c})$, одакле

$$1 + P(\vec{b},\vec{c}) \ge |P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})|. \tag{4.169}$$

Ако P није константа, десна страна је уопште реда $|\vec{b} - \vec{c}|$ за мале $|\vec{b} - \vec{c}|$. Тако $P(\vec{b},\vec{c})$ не може бити стационарно за минималну вредност (-1 када $\vec{b} = \vec{c}$) и не може бити једнако квантно механичкој вредности (4.155).

Нити може квантно механичка корелација (4.155) бити узета произвољно блиско са обликом (4.154). Формални доказ овог тврђења се може извести на следећи начин. Ми не бисмо бринули за неуспех апроксимирања изолованих тачака, па уместо (4.154) и (4.155) размотримо функције:

$$\bar{P}(\vec{a},\vec{b}), \quad \overline{-\vec{a}\cdot\vec{b}}, \tag{4.170}$$

где црта изнад означава независну средњу вредност функција испод по векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ унутар датих малих углова. Претпоставимо да за све те векторе важи ограничење разлике

$$|\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{b}| \le \epsilon. \tag{4.171}$$

Затим ћемо показати да ϵ не може бити произвољан мали број.

Претпоставимо да је за све $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$|\overline{\vec{a}\cdot\vec{b}} - \vec{a}\cdot\vec{b}| \le \delta. \tag{4.172}$$

Тада из (4.171) следи

$$|\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{b}| \le \epsilon + \delta. \tag{4.173}$$

Из (4.154) имамо

$$\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) = \int \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a},\lambda) \bar{B}(\vec{b},\lambda)\, d\lambda, \tag{4.174}$$

где је

$$|\bar{A}(\vec{a},\lambda)| \le 1, \quad |\bar{B}(\vec{b},\lambda)| \le 1. \tag{4.175}$$

Из претходне две, за $\vec{a} = \vec{b}$ следи

$$\int \rho(\lambda)[\bar{A}(\vec{b},\lambda)\bar{B}(\vec{b},\lambda) + 1]\, d\lambda \le \epsilon + \delta. \tag{4.176}$$

Опет из претходне

$$\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) - \bar{P}(\vec{a},\vec{c}) = \int \rho(\lambda)[\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}(\vec{b},\lambda) - \bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}(\vec{c},\lambda)]\, d\lambda$$

$$= \int \rho(\lambda)\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}(\vec{b},\lambda)[1 + \bar{A}(\vec{b},\lambda)\bar{B}(\vec{c},\lambda)]\, d\lambda$$

$$- \int \rho(\lambda)\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}(\vec{c},\lambda)[1 + \bar{A}(\vec{b},\lambda)\bar{B}(\vec{b},\lambda)]\, d\lambda.$$

Користећи (4.175) добијамо

$$|\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) - \bar{P}(\vec{a},\vec{c})| \le \int \rho(\lambda)[1 + \bar{A}(\vec{b},\lambda)\bar{B}(\vec{c},\lambda)]\, d\lambda +$$

$$+ \int \rho(\lambda)[1 + \bar{A}(\vec{b},\lambda)\bar{B}(\vec{b},\lambda)]\, d\lambda.$$

Затим из (4.174) и (4.176) добијамо

$$|\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) - \bar{P}(\vec{a},\vec{c})| \le 1 + \bar{P}(\vec{b},\vec{c}) + \epsilon + \delta.$$

Коначно, користећи (4.173) налазимо

$$|\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}| - 2(\epsilon+\delta) \le 1 - \vec{b}\cdot\vec{c} + 2(\epsilon+\delta),$$

или

$$4(\epsilon+\delta) \ge |\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}| + \vec{b}\cdot\vec{c} - 1. \tag{4.177}$$

Узмимо на пример $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \sqrt{2}/2$, тада је

$$4(\epsilon+\delta) \ge \sqrt{2} - 1.$$

За мало δ, број ϵ не може бити произвољно мали.

Према томе, очекивана вредност квантне механике не може бити представљена, било тачно било произвољно близу, у облику (4.154). То је садржај Беловог рада, за који он на крају примећује да се може лако генералисати. За бар једно квантно механичко стање у „синглет“ (спрегнутом) стању у комбинованим потпросторима, статистичко предвиђање квантне механике није компактибилно са одвојеним одређивањима.

То је једна интерпретација Беловог резултата, да (спрегнути) квантни систем није прост „збир“ (својих) делова, на начин како смо навикли „сабирати“ делове макросвета. На пример, замислимо да имамо затамљен магични квадрат са целим бројевима у пољима и да сваки пут када осветлимо бројеве у произвољном али само једном ретку видимо бројеве са збиром непарним бројем, али када осветлимо произвољну колону установимо да је збир њених бројева паран. Откривање свих редака одједном (или свих колона) је немогуће, јер би такав магични квадрат био контрадиторан и зато не би могао постојати као интегрална статична целина. Контрадиције нема ако претпоставимо да осветљавање само једног ретка мења остале. Слично томе, мерење једне компоненте квантног система мења другу, наша интеракција са једним делом мења резултат евентуалне интеракције са другим.

Напомињем још једном, квантни систем је спрегнут када промена једног његовог дела мења и неки други његов део. Друго, квантни систем је спрегнут када је узимање информације из једног његовог аспекта тако јединствено да након узимања следеће систем не остаје у истом стању као када бисмо узимања истих информација чинили обрнутим редоследом. Такође, поремећај унутар спрегнутог квантног система може се преносити директно путем преноса неизвесности, без претходне реализације неизвесности у информацију и затим преноса информације. Делом друга, а у потпуности последња од ових примедби су новост за физику.

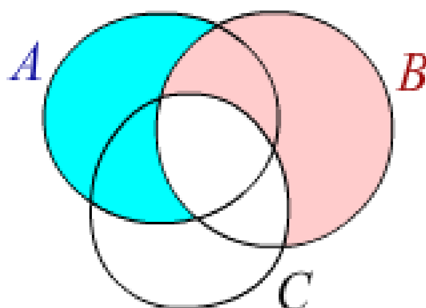
4.13.2 Белова неједнакост

Дата је група објеката са три различите особине: A, B и C. Ради лакшег праћења текста, замислите да је то група ученика у разреду са особинама: (A) да су мушкарци, (B) да су виши од 170 cm и (C) да имају плаве очи. Докажимо сада релацију коју ћемо називати Белова неједнакост[65]:

$$\mathrm{No}(A, \neg B) + \mathrm{No}(B, \neg C) \geq \mathrm{No}(A, \neg C). \tag{4.178}$$

Другим речима, број особа које имају особину A а немају B плус број особа које имају особину B а немају C већи је или једнако броју особа које имају особину A а немају C.

Пример 4.13.1. *Доказати Белову неједнакост помоћу скупова.*



Slika 4.9: Венов дијаграм пресека скупова A, B и C.

Доказ. На слици 4.9 видимо Венов дијаграм, при чему „+“ значи унију скупова, а $\neg S$ комплемент. Скуп $A \cap \neg B$ је шрафиран плаво, скуп $B \cap \neg C$ црвено. Лако видимо да је $(A \cap \neg B) + (B \cap \neg C) \supseteq (A \cap \neg C)$, а одатле (4.178). □

Пример 4.13.2. *Доказати неједнакост (4.178) алгебарски.*

Доказ. Приметимо да је

$$\mathrm{No}(A, \neg B, C) + \mathrm{No}(\neg A, B, \neg C) \geq 0,$$

јер радимо само са особинама које имају позитивне вредности или их уопште немају. Додајмо на обе стране те неједнакости

$$\mathrm{No}(A, \neg B, \neg C) + \mathrm{No}(A, B, \neg C) = \mathrm{No}(A, \neg C)$$

и резултат је тражена неједнакост. □

Дакле, наведена неједнакост је увек тачна; немогуће је замислити пример који би је нарушио (покушајте!). Шта онда рећи за мерења спина спрегнутих честица након којих би се неједнакост (4.178) показала нетачна? Ако не желимо да сумњамо у логику математике, онда долазимо до закључка да се током мерења мењају особине A, B и C датог скупа. Као када би, док ми бројимо ученике у разреду они кришом улазили и излазили па и мењали своју висину и боју очију.

[65]Department of Physics University of Toronto: Bell's Theorem, by David M. Harrison, 1990.

Хајзенберг је једном приликом, коментаришући експеримент са двоструким отвором рекао: „Путања електрона настаје зато што је посматрамо“.

Експерименти са спином и Беловом неједнакошћу[66] су заиста рађени и они су редовно показивали нарушавање те неједнакости. Први такав експеримент објавили су Клаусер, Хорне, Шимони и Холт 1969. године користећи парове фотона. Затим су следили експерименти на паровима електрона, протона, опет фотона и јонизованих атома. Чињеница да је Белова неједнакост нарушавана, чак и у случајевима веома удаљених честица, указује да природа можда не поштује принцип локалности и да дозвољава тренутно дејство на великом простору.

Покушајмо сада разумети примену горње неједнакости на честицама и њиховим спиновима. Нема принципијелне разлике када се у оваквим експериментима користе фотони са спином ± 1, уместо електрона чији је спин $\pm\frac{1}{2}$. У првом случају за детекцију спина користе се кристали који поларизују светлост, у другом магнети. Нека у нашем случају то буде млаз електрона са особинама:

A - спин електрона је усмерен на горе (0°);

B - у односу на горе спин је под углом 45°;

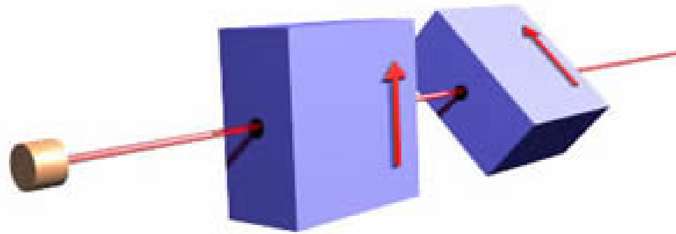
C - спин електрона је хоризонталан усмерен ка десно (90°).

Белову неједнакост сада читамо:

Бр(спин-горе, косо-доле) + Бр(косо-горе, спин-лево) ≥ Бр(спин-горе, спин-лево),

где је „Бр“ број измерених, избројаних електрона са особином у загради.

Први број, Бр(спин-горе, косо-доле), представља узастопно мерење вертикалног спина а затим дијагоналног ка доле. Међу равномерно мешаним електронима пола-пола биће их са спином вертикално горе односно доле, а исто тако 50-50 одсто биће их са спином косо горе и косо доле.



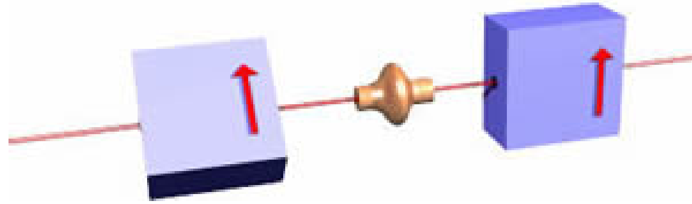
Slika 4.10: Узастопни пролазак електрона кроз два филтера.

Међутим, узастопно мерење горњег и косог спина представљаће проблем. Од електрона који прођу први филтер горе, неће 50 одсто, већ ће 85 одсто проћи други филтер косо-горе (слика 4.10), па ће (након проласка првог филтера) само 15 одсто проћи филтер косо-доле. Дакле, мерењем би за први број добијали само 15% од свих електрона из снопа.

Мерење спина-горе неповратно мења број електрона са спином косо-доле, а слично се догађа и са остала два броја из Белове неједнакости. Показује се да је то последица Хајзенберговог принципа неодређености и да тај утицај може да наруши Белову неједнакост.

Замислимо сада другачији сноп електрона, као на слици 4.11, емитованих из радиоактивне супстанце чији је укупни спин нула. Тада би требало да сваки електрон који се креће у десно од извора, а који има спин горе гарантовано буде удружен са електроном

[66]наравно, рађени су експерименти и на другачијим моделима



Slika 4.11: Електрони испаљени у два различита смера.

са спином доле на левој страни од извора. Такође, електрон који се креће лево од извора а на којем је измерен спин косо-горе биће у пару са електроном десно од извора са спином косо-доле. Тако бисмо „надмудрили“ Хајзенбергове релације неодређености, што значи да мерење неће потврдити наша очекивања.

4.13.3 Динамичка зависност

Мерење и у овом случају нарушава Белову неједнакост, али нам сада доноси и нови закључак. Не само да чин препознавања особина неких честица мења остале из датог система, већ се та промена дешава и нелокално, као да постоји нека тренутна интеракција на већем простору. Чудни резултати ових мерења се могу објашњавати неком врстом *динамичке зависности*, сличној оној (статичној) нама познатој из теорије вероватноће.

Први пример. Исходи бацања два фер новчића су независни ако су након бацања првог као и другог вероватноће да падне „Писмо“ односно „Глава“ једнаке:

$$\Pr(\Pi) = \Pr(\Gamma) = \frac{1}{2}. \tag{4.179}$$

Тада имамо четири једнако вероватна исхода:

$$\begin{cases} \Pr(\Pi,\Pi) = \frac{1}{4}, & \Pr(\Pi,\Gamma) = \frac{1}{4}, \\ \Pr(\Gamma,\Pi) = \frac{1}{4}, & \Pr(\Gamma,\Gamma) = \frac{1}{4}, \end{cases} \tag{4.180}$$

који би се у експерименту појавивали сваки са око 25 одсто случајева.

Други пример. Замислимо да су прво и друго бацање новчића у некој корелацији (нпр. као пол и висина студената), односно да су узајамно зависни догађаји. Рецимо екстремно, сваки пут када у првом бацању падне „Писмо“ да у другоме падне „Глава“ и обрнуто, након што би пала „Глава“ да обавезно падне „Писмо“. Тада бисмо имали следеће вероватноће исхода:

$$\begin{cases} \Pr(\Pi,\Pi) = 0, & \Pr(\Pi,\Gamma) = \frac{1}{2}, \\ \Pr(\Gamma,\Pi) = \frac{1}{2}, & \Pr(\Gamma,\Gamma) = 0. \end{cases} \tag{4.181}$$

Мешовити догађаји „ПГ“ и „ГП“ би се дешавали у 50 одсто случајева сваки, док се исти догађаји „ПП“ и „ГГ“ не би дешавали уопште.

Када напишемо таласне функције ϕ_Π и ϕ_Γ које представљају стања „Писмо“ и „Глава“ у првом бацању новчића, а φ_Π и φ_Γ у другом бацању, онда ће у првом и другом примеру укупна стања система бити:

Први пример: $\phi_\Pi\varphi_\Pi + \phi_\Pi\varphi_\Gamma + \phi_\Gamma\varphi_\Pi + \phi_\Gamma\varphi_\Gamma$ - независност,

Други пример: $\phi_\Pi\varphi_\Gamma + \phi_\Gamma\varphi_\Pi$ - зависност.

Приметимо да се стање независног система може писати и у облику растављеном на факторе $(\phi_\Pi + \phi_\Gamma)(\varphi_\Pi + \varphi_\Gamma)$, док зависног не може.

Знамо да је мерење размена информације између делова физичког система и експериментатора, односно његове опреме. У квантној механици посебно, мерење значајно мења стање система, што је последица одузимања укупне информације[67] подсистему а које тада постаје релативно велико.

Слика 4.12 је ишла уз прилог британског портала[68] када је 26. октобра 2015. године група физичара Делфт Универзитета технологије у Холандији низом експеримената потврдила квантну спрегнутост, тачније: „сабласно дејство на даљину“. Они су постављали два дијаманта на супротним странама камуса, удаљена око 1,3 километара, излажући их снажним микроталасним зрачењима. Тако су електрони држани у „дијамантској клопци“ да би емитовали фотоне низ оптичка влакна ка инструменту за бележење, који се налазио на једнакој удаљености од оба дијаманта. Када би фотони интераговали, покренули би спрегнутост између електрона који их производе. Након 245 проба током 18 дана, ови истраживачи су дошли до закључка да је та врста спрегнутости потврђена. Њој је претходила дуга серија сличних тестова рађена од краја 70’ у различитим лабораторијама света, али увек са различитим сумњама.

Slika 4.12: Квантна спрегнутост.

Објаснићу још једном механизам одузимања информације из система мерењем[69]. Мерећи дату особину квантног система ми добијамо информацију (о њој), што значи да систем остаје са мањком информације, мањком неизвесности и вишком вероватноће[70]. То даље значи да се остатак система боље изјашњава, да се његове особине сада могу појављивати са већим вероватноћама. А то нас доводи до оне горе поменуте реченице коју је много пре изговорио Хајзенберг, да се систем дефинише процесом мерења.

Ови општи закључци важе и за спрегнуте квантне системе. Спрегнути системи, попут горе наведеног у другом примеру, чији су подсистеми (прво и друго бацање новчића) екстремно зависни, има боље повезане, боље уређене делове, а зато и предвидљивије исходе од неспрегнутог. Због већих вероватноћа, спрегнути систем је мање информативан. Након мерења, за исту одузету информацију спрегнутом систему прео-

[67] Претпоставка је да информација не може настати из ничега, нити нестати у ништа.

[68] Unexplained: `http://unexplained.co/`

[69] таквих описа баш и нема у литератури (осим у мојим списима)

[70] Радимо само са Хартлијевом информацијом $-\ln p$, где је p вероватноћа.

стаје мање информације него неспрегнутом, па такав након мерења може остати са још већим вероватноћама за следећа мерења обзервабли. Међутим, мерење је и комуникација, што значи и прелазак неких информација од апаратуре ка систему.

Уопште, у *дискретном* спектру, мерењем опсервабле A система $|\psi\rangle$ вероватноћа добијања једне недегенерисане сопствене вредности a_n одговарајућег оператора $\hat{A}$ је

$$\Pr(a_n) = \frac{|\langle\psi_n|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}, \tag{4.182}$$

где је $|\psi_n\rangle$ сопствено стање $\hat{A}$ са сопственом вредношћу a_n. За m пута дегенерисану сопствену вредност вероватноћа је

$$\Pr(a_n) = \frac{\sum_{j=1}^m |\langle\psi_n^j|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}. \tag{4.183}$$

Стање $|\psi\rangle$ система представљамо линеарном суперпозицијом сопствених стања $|\psi_n\rangle$ одговарајућег оператора $\hat{A}$ који представљају обзерваблу A коју меримо:

$$|\psi\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\psi\rangle = \sum_n a_n|\psi_n\rangle. \tag{4.184}$$

Мерењем опсервабле A мења се стање система $|\psi\rangle$ у једно од сопствених стања $|\psi_n\rangle$ оператора $\hat{A}$ и добија се сопствена вредност a_n. Једини изузетак овога је када је систем већ био у једном од сопствених стања опсервабле која се мери. На пример, ако је систем у сопственом стању $|\psi_n\rangle$, мерење опсервабле A даје са извесношћу вредност a_n без промене стања $|\psi_n\rangle$. У случају мерења сопствене вредности $a_n = \langle\psi_n|\psi\rangle$, дакле одузимања информације, у датом систему $|\psi\rangle$ би остало мање информације

Аналогно важи за *континуални* спектар:

$$\frac{d}{da}\Pr(a) = \frac{|\psi(a)|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|\psi(a)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(a')|^2 da'}, \tag{4.185}$$

задат помоћу густине вероватноће налажења вредности опсервабле у интервалу од a до $a + da$. Пре мерења, ми не знамо са сигурношћу у којем сопственом стању, међу различитим $|\psi_n\rangle$, ће бити систем након мерења. Имамо само вероватноће, јер таласна функција не предвиђа резултат појединачног мерења. Она одређује само вероватноће дистрибуције.

Исто важи и у спрегнутом систему, осим што га представљамо вектором стања:

$$|\psi\rangle = a|x\rangle_1|y\rangle_2 + be^{-i\phi}|y\rangle_1|x\rangle_2. \tag{4.186}$$

То је општи облик спрегнутог стања два подсистема. Овде су $|a|^2$ и $|b|^2$ вероватноће одговарајућих производа стања $|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 = |x\rangle_1|y\rangle_2$ и $|y\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 = |y\rangle_1|x\rangle_2$, при чему је $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Члан $e^{-i\phi}$ представља фазну разлику. Посебност спрегнутих стања је да се она не могу раставити на факторе у производ два стања одвојених подсистема.

У овом смислу, спрегнуто, уплетено стање квантног система је стање два или више просторно одвојених подсистема које чине целину без могућности одвојеног одређивања делова, подсистема. Приметимо да је та дефиниција у складу са свим претходним. Рецимо, са тумачењем информације, да је спрегнут систем завистан и зато боље „увезан“, да има „јасније“ исходе због чега (мерењем) добијамо мање информације. То што он посеже и за „дејством на даљину“ само потврђује његову већу детерминисаност.

4.14 Комутативност

Видели смо да некомутативност квантних оператора значи квантну спрегнутост. Са друге стране, знамо да постоје и комутативни оператори, као што је јединични оператор који је комутативан са сваким, или узајамно инверзни оператори који су узајамно комутативни. Видећемо да поред класе некомутативних оператора постоји и класа комутативних, али да између њих постоји и класа некомутативних оператора за које нису могуће релације попут неодређености положаја и импулса. Пример последњих су матрице другог реда.

Пример 4.14.1. *Доказати да је за матрице* (2×2) *увек* $[\hat{A},\hat{B}]\neq\hat{I}$.

Решење. Претпоставимо супротно, да наведена једнакост важи. Даље имамо:

$$\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=\hat{I},$$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}\\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a_{12}b_{21}-b_{12}a_{21} & (a_{11}-a_{22})b_{12}-(b_{11}-b_{22})a_{12}\\ (b_{11}-b_{22})a_{21}-(a_{11}-a_{22})b_{21} & a_{21}b_{12}-b_{21}a_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

На главној дијагонали имамо једначине:

$$\begin{cases} a_{12}b_{21}-b_{12}a_{21}=1\\ a_{21}b_{12}-b_{21}a_{12}=1,\end{cases}$$

чији збир даје $0=2$, тј. контрадикцију. □

Дакле, за овакве матрице није могућа релација попут Хајзенбергових неодређености положаја и импулса. Докажите на сличан начин матрицама и познати став алгебре: ако два оператора комутирају онда постоји база простора која је истовремено сопствена база за оба оператора. Показује се да оператори који комутирају имају заједничке сопствене функције и обрнуто, ако заједничке сопствене функције два оператора генеришу потпростор такви оператори комутирају.

Наиме, за $\psi=\psi(x;a,b)$, из

$$\tilde{A}\psi=a\psi,\quad \tilde{B}\psi=b\psi, \tag{4.187}$$

следи $\tilde{B}\tilde{A}\psi=\tilde{B}(a\psi)=a\tilde{B}\psi=ab\psi$ и исто тако $\tilde{A}\tilde{B}\psi=ba\psi$, односно

$$\tilde{A}\tilde{B}\psi(x;a,b)=\tilde{B}\tilde{A}\psi(x;a,b). \tag{4.188}$$

Претпоставимо ли да све истовремене сопствене функције формирају комплетан скуп, другим речима, да је било коју другу функцију $\psi(x)$ могуће изразити као збир (или интеграл) облика

$$\psi(x)=\sum_{a,b}\lambda(a,b)\psi(x;a,b), \tag{4.189}$$

онда имамо и комутативност датих оператора над $\psi(x)$. Отуда следећа теорема.

Теорема 4.14.2. *Ако истовремене сопствене функције два оператора чине комплетан скуп, оператори комутирају. Ако два оператора комутирају, они имају истовремене сопствене функције.*

Доказ. Из (4.187) такође следи да је функција $\psi' = \tilde{B}\psi$ сопствена функција од $\tilde{A}$ са одговарајућом сопственом вредношћу a. Стога је могуће писати линеарну комбинацију, у квантној механици кажемо суперпозицију, сопствених функција $\psi(x;a,\beta')$:

$$\tilde{B}\psi(x;a,\beta) = \sum_{\beta'} B(\beta',\beta)\psi(x;a,\beta'), \tag{4.190}$$

где коефицијенти развоја $B(\beta',\beta)$ очигледно зависе од оба, β и β'. Сада је могуће конструисати линеарну суперпозицију

$$\psi = \sum_{\beta} c(\beta)\psi(x;a,\beta), \tag{4.191}$$

која ће задовољавати једначину $\tilde{B}\psi = b\psi$. Из поменутих једнакости, изједначавањем коефицијената добијамо

$$\sum_{\beta'} B(\beta,\beta')c(\beta') = bc(\beta), \tag{4.192}$$

где ће s бити број могућих вредности β за дато a. Другим речима, s је степен дегенерације сопствене вредности a. Означимо решења ове једначине са:

$$c_1(\beta), c_2(\beta), \dots, c_s(\beta), \tag{4.193}$$

са одговарајућим сопственим вредностима, редом $b_1, b_2, \dots, b_s$, па ће функције

$$\varphi(x;a,b_s) = \sum_{\beta} c_s(k)\psi(x;a,\beta) \tag{4.194}$$

бити решења и једначине $\tilde{A}\varphi = a\varphi$ и $\tilde{B}\varphi = b\varphi$, што значи да постоје истовремене сопствене функције оба дата оператора. □

Доказали смо теорему када је степен дегенерације s коначан, али она важи и када је s бесконачно. Уместо даљих доказивања, обратимо пажњу на, следеће, физичко значење таквих теорема.

Комутатори оператора изражавају могућност истовременог мерења одговарајућих физичких величина. Обрнуто речено, некомутативност оператора чини немогућим истовремено мерење одговарајућих квантних величина[71].

Знамо да класична механика одлично тумачи макроскопске појаве са ретким изузецима (нпр. суперфлуидност), али да она не вреди за мале ствари. Насупрот томе, знамо да квантна механика одлично тумачи микр-свет али, након апрроксимација, да она добро тумачи и макро-свет. То је део Еренфестове теореме[72].

Са тиме и претходним разматрањем у виду, конструишемо операторе:

$$\begin{cases} \tilde{L}_x = \tilde{y}\tilde{p}_z - \tilde{z}\tilde{p}_y, \\ \tilde{L}_y = \tilde{z}\tilde{p}_x - \tilde{x}\tilde{p}_z, \\ \tilde{L}_z = \tilde{x}\tilde{p}_y - \tilde{y}\tilde{p}_x, \end{cases} \tag{4.195}$$

[71]Цитат из из уџбеника [19], p. 54, који је Александар Фок написао пре 1932.

[72]Ehrenfest theorem: `https://en.wikipedia.org/wiki/Ehrenfest_theorem`

разлике производа оператора положаја и импулса, по координатама Декартовог правоуглог система $Oxyz$. Лако препознајемо *угловни импулс* (ангуларни момент) класичне механике:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{p}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \\ \tilde{p}_x & \tilde{p}_y & \tilde{p}_z \end{vmatrix}, \tag{4.196}$$

одакле следи $\tilde{L}^2 = \tilde{L}_x^2 + \tilde{L}_y^2 + \tilde{L}_z^2$ и:

$$[\tilde{L}_y, \tilde{L}_z] = -\tilde{L}_x, \quad [\tilde{L}_z, \tilde{L}_x] = -\tilde{L}_y, \quad [\tilde{L}_x, \tilde{L}_y] = -\tilde{L}_z. \tag{4.197}$$

Из $[\tilde{L}_z, \tilde{z}]\psi = (\tilde{L}_z\tilde{z} - \tilde{z}\tilde{L}_z)\psi = (\tilde{x}\tilde{p}_y - \tilde{y}\tilde{p}_x)\tilde{z}\psi - \tilde{z}(\tilde{x}\tilde{p}_y - \tilde{y}\tilde{p}_x)\psi = 0$ следи $[\tilde{L}_z, \tilde{z}] = 0$. Слично добијамо једнакост $[\tilde{L}_z, \tilde{p}_z] = 0$, а затим и остале:

$$[\tilde{L}_\xi, \tilde{\xi}] = 0, \quad [\tilde{L}_\xi, \tilde{p}_\xi] = 0, \quad \xi \in \{x, y, z\}. \tag{4.198}$$

Потсећам, $\tilde{\xi}\psi = \xi\psi$ и $\tilde{p}_\xi\psi = -i\hbar\partial_\xi\psi$.

Квантно стање које се ротира око z-осе има има угловни импулс у правцу z-осе, али се ротација одвија у равни Oxy. Зато оператор $\tilde{L}_z$ нити је спрегнут са операторима $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, нити са одговарајућим операторима линијског (обичног) импулса $\tilde{p}_x$ и $\tilde{p}_y$. Насупрот томе, положај и (линијски) импулс јесу спрегнути ако се пружају по истој координати, односно јесу спрегнути са угловним импулсом ако са њим нису у истој димензији:

$$[\tilde{L}_z, \tilde{x}] = i\hbar\tilde{y}, \quad [\tilde{L}_z, \tilde{p}_x] = i\hbar\tilde{p}_y. \tag{4.199}$$

Угловни импулси су међусобно спрегнути (4.197).

Једначина сопстених вредности угловног импулса $\tilde{L}_z$ је

$$-i\hbar(x\partial_y\psi - y\partial_x\psi) = l_z\psi.$$

У цилиндарским коориднатама $O\rho\varphi z$ имамо:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$-i\hbar\partial_\varphi\psi = l_z\psi,$$

са решењем

$$\psi = \psi_0(z, \rho)e^{il_z\varphi/\hbar}. \tag{4.200}$$

Ово је периодична функција са периодом 2π, за коју је:

$$l_z = m_z\hbar, \quad m_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{4.201}$$

Слично налазимо за остале две компоненте. У Декартовим коориднатама, сопствене функције угловних импулса $\tilde{L}_x$, $\tilde{L}_y$ и $\tilde{L}_z$ биће, редом:

$$\begin{cases} \psi_x = f_1(x, \sqrt{y^2 + z^2})(y + iz)^{m_x}, \\ \psi_y = f_2(y, \sqrt{z^2 + x^2})(z + ix)^{m_y}, \\ \psi_z = f_z(z, \sqrt{x^2 + y^2})(x + iy)^{m_z}, \end{cases} \tag{4.202}$$

са сопственим вредностима, редом: $l_x = m_x\hbar$, $l_y = m_y\hbar$ и $l_z = m_z\hbar$.

Вратимо се сада на теорему 4.14.2. Иако за пар комутативних оператора увек постоји истовремена сопствена база за сваког од њих, ако један од тих оператора има

једнаке сопствене вредности, тако да је свака линеарна комбинација тих сопствених вектора такође сопствени вектор тог оператора, иста линеарна комбинација не мора бити сопствени вектор другог оператора. То доказујемо следећим примерима.

Размотримо стања $|l,m\rangle = |1,1\rangle$ и $|l,m\rangle = |1,-1\rangle$. Оба су сопствени вектори $\tilde{L}^2$ и $\tilde{L}_z$ (и сопствене функције). Сопствене вредности $\tilde{L}_z$ су $\hbar$ и $-\hbar$ редом, али стање $|1,1\rangle + |1,-1\rangle$ није сопствени вектор $\tilde{L}_z$ а јесте сопствени вектор $\tilde{L}^2$.

Други пример. Посматрајмо матрице:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.203}$$

Вектори $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$ су сопствени вектори обе. Први има заједничку сопствену вредност 1 са обе матрице, а други има различите сопствене вредности 1 и -1 редом за прву и другу матрицу. Ако уместо наведених употребимо векторе $(0,1,1)$ и $(0,1,-1)$, они ће и даље бити сопствени вектори $\hat{A}$ са сопственом вредношћу 1, али неће више бити сопствени вектори $\hat{B}$.

Трећи пример се односи на исто, ако следећу матрицу посматрамо као 3-члани низ различитих (сопствених) вектора

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.204}$$

Лако је проверити да $\hat{C}$ комутира са $\hat{A}$, али не комутира са $\hat{B}$.

Оператор кинетичке енергије је

$$\tilde{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \tag{4.205}$$

у правоуглом Декартовом систему координата $Oxyz$, где је m маса квантног система. Лако је проверити да се он своди на класични израз

$$T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \tag{4.206}$$

где су p_ξ компоненте ($\xi \in \{x,y,z\}$) импулса. У сферним координатама $Or\varphi\theta$, кинетичка енергија добија облик

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2\right), \tag{4.207}$$

а отуда је лако добити одговарајући оператор стављајући:

$$\tilde{p}_r = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}, \quad \tilde{p}_\varphi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \tilde{p}_\theta = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{4.208}$$

Оператор кинетичке енергије за слободни електрон је његов Хамилтонијан $\tilde{H}$. Када је електрон у ваљском пољу потенцијалне енергије $\tilde{U} = \tilde{U}(x,y,z)$, тада је

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m}(\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2) + \tilde{U}(x,y,z), \tag{4.209}$$

односно $\tilde{H} = \tilde{T} + \tilde{U}$, при чему је $\tilde{U}\psi = U\psi$, тј. оператор потенцијалне енергије је множење потенцијалном енергијом.

То су углавном сви основни оператори квантне механике, које одавно сматрамо добро потврђене експериментима:

$$
\begin{array}{lll}
\text{позиција} & \tilde{\mathbf{r}} & \text{множење са } \mathbf{r}, \\
\text{импулс} & \tilde{\mathbf{p}} & -i\hbar\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right), \\
\text{енергија (4. импулс)} & \tilde{E} & i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\ t = ct', \\
\text{угловни импулс} & \tilde{L}_z & -i\hbar\left(\tilde{x}\frac{\partial}{\partial y} - \tilde{y}\frac{\partial}{\partial x}\right), \\
\text{кинетичка енергија} & \tilde{T} & -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \\
\text{потенцијална енергија} & \tilde{U}(\mathbf{r}) & \text{множење са } U(\mathbf{r}), \\
\text{Хамилтонијан} & \tilde{H} & -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \tilde{U}(\mathbf{r}),
\end{array}
\tag{4.210}
$$

Приметимо да листом доминирају множење (положај, потенцијална енергија) и изводи по координатама (импулс, квадрат импулса).

Упадљива последица такве доминације је пораст значаја положаја и импулса. На пример, Хајзенбергове релације неодређености за положај и импулс сада изгледају као основа свих других његових неодређености. Потенцијална енергија, која на први поглед изгледа као изузетак, могла би се покушати третирати као особина положаја. Постаје разумљивији опис настанка метаријалног света ове васионе, са почетка књиге: сва физичка супстанца долази из истог „резервоара“, из безличног хаоса, односно из неизвесности која претходи информацији.

Следећи пример је образац за извођење инверзних оператора, ретких у физици.

Пример 4.14.3. *Претпостављајући да је γ мали број, показати да је*

$$
(\tilde{A} - \gamma\tilde{B})^{-1} = \tilde{A}^{-1} + \gamma\tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{A}^{-1} + \gamma^2\tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{A}^{-1} + \dots \tag{4.211}
$$

када одговарајући инверзни оператори постоје.

Решење. Пођимо од израза

$$
(\tilde{A} - \gamma\tilde{B})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k\tilde{C}_k,
$$

где су γ_k коефицијенти а $\tilde{C}_k$ оператори које тек треба одређивати. Множимо тај израз (рецимо са лева) са $\tilde{A} - \gamma\tilde{B}$, па добијамо

$$
\tilde{I} = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k(\tilde{A} - \gamma\tilde{B})\tilde{C}_k = \tilde{A}\tilde{C}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k(\tilde{A}\tilde{C}_k - \tilde{B}\tilde{C}_{k-1}).
$$

Изједанчавањем коефицијената уз једнаке потенције γ, добијамо рекурзивне релације:

$$
\tilde{C}_0 = \tilde{A}^{-1}, \quad \tilde{C}_k = \tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{L}_{k-1},
$$

а отуда тражени израз. □

У случају да су дати оператори бројеви, израз (4.210) се своди на познати Тејлоров развој у ред степених функција

$$
\frac{1}{A - \gamma B} = \frac{1}{A} + \gamma\frac{B}{A^2} + \gamma^2\frac{B^2}{A^3} + \dots \tag{4.212}
$$

Отуда није тешко добити одговарајуће облике у случају комутативних оператора.

4.15 Таласна једначина

Основна једначина квантне механике изражава необичну и једноставну чињеницу, да је Хамилтонијан ($H = T+U$) односно збир кинетичке (T) и потенцијалне (U) енергије квантног система једнак његовој укупној енергији (E):

$$\tilde{H}\psi = \tilde{E}\psi. \tag{4.213}$$

Ову диференцијалну једначину називамо Шредингеровом таласном једначином, јер ју је Шредингер први открио 1926. године, изводећи је на компликован[73] али тада неопходан начин.

Зависно од тога да ли се таласна функција мења или не мења са временом t, Шредингерова таласна једначина постаје „временски зависна“, када ту функцију често означавамо са $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$, или „временски независна“, када пишемо просто $\psi = \psi(\mathbf{r})$. За посебне облике једначине користимо операторе, попут (4.210), различите системе координата и различите потенцијале.

Пример 4.15.1. *Формирати Шредингерову једначину за слободну честицу и наћи решења.*

Решење. Честицу сматрамо „слободном“ када је у константном потенцијалу који зато можемо узети да не постоји, $U = 0$. Импулс $p = \hbar k$, $\omega = |k|/c$ и енергија $E = \hbar\omega$ такве честице су такође константни (k може бити било који реалан број, c је брзина светлости у вакууму), па можемо посматрати само апсцису. Формирамо таласну једначину

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t), \tag{4.214}$$

са општим решењем

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}, \tag{4.215}$$

где су $A, B \in \mathbb{C}$ константе које тек треба одредити. □

Уврштавањем (4.215) у (4.214) можете проверити тачност решења, а само решавање оваквих диференцијалних једначина може се наћи на многим местима у математици и физици. Тамо стоји и једна сада важна теорема, ако једначина има класу решења чији чланови су функције са реалним параметрима (какав је k), онда се њена решења не дају нормирати.

Формално то значи да интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2\,dx$ дивергира. Тада не постоје нити константе A и B такве да је вредност овог интеграла један, да би он могао представљати вероватноћу налажења честице било где на апсциси ($-\infty < x < \infty$), било кад. Зато се у физици данас, помало натегнуто сматра да овакви модели у природи не постоје. За краће интервале ($a \le x \le b$) се узима да постоје случајеви у природи (електрон заробљен у блоку метала), јер се тада могу наћи одговарајуће константе A и B за одржање услова нормираности $\int_a^b |\Psi|^2\,dx = 1$.

Насупрот томе, овде предлажемо да квантни систем може утицати на сопствену прошлост (в. 1.6 Таласи материје). У време између две узастопне интеракције слободну честицу, односно квантни систем учесника сматрамо виртуелним[74]. Тек када (ако) се

[73] Р. Вуковић - Неодређеност I: www.academia.edu/26619936/

[74] Супстанца је реална, виртуелна или непостојећа.

деси и друга од две узастопне интеракције, тада се дефинишу понашања обе у складу са законима физике (одржања). Тек тада честица (систем) постаје реалност.

Овакво тумачење може изгледати веома чудно и зато је названо спекулацијом, хипотезом или предлогом. Међутим, када приметите да оно није контрадикторно, тада се сетите да оно и није необично. На пример, ми констатујемо да се прва интеракција десила тако што региструјемо другу (рецимо на фото-плочи). Тек када електрон стигне на одређено место (буде измерен), не само да ми тада сазнамо нешто о његовом претходном путовању, већ (цитирам Хајзенберга) његова путања се дефинише његовим мерењем. То је у складу са (хипо) тезом да реалност добијамо као мноштво реализација случајних догађаја.

Како нестаје неизвесности тако настаје информација. У складу са опажањем у макро-свету, све сложеније системе видимо реалнијим, јер имају чешће интеракције. Све већи макро-системи су све ређе виртуелни, док не постану сасвим не-виртуелни, што би значило крај случајности и крај наше васионе. Зато ову васиону називам „васионом хаоса“.

Пример 4.15.2. *Шредингерова једначина за једно-димензионалну кутију.*

Решење. Честица је слободна унутар кутије, $0 < x < x_0$, из које не може побећи јер су на границама бесконачни потенцијали, $U(0) = U(x_0) = \infty$, док су ти потенцијали на свим осталим местима нуле. Шредингерова једначина

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \tag{4.216}$$

има опште решење $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, са произвољним $A, B \in \mathbb{C}$. Међутим, интересују нас само реалне вредности ове функције, па је трансформишемо у облик:

$$\psi(x) = A(\cos kx + i\sin kx) + B(\cos kx - i\sin kx),$$

$$\psi(x) = (A+B)\cos kx + i(A-B)\sin kx,$$

$$\psi(x) = a\cos kx + b\sin kx,$$

$$\psi(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos kx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin kx\right),$$

$$\psi(x) = \sqrt{a^2+b^2}(\sin\phi\cos kx + \cos\phi\sin kx),$$

$$\psi(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(kx+\phi).$$

Ово треба бити реална функција стојећх таласи који на границама кутије, $x = 0$ и $x = x_0$, имају вредност нула, па је $\phi = n_1\pi$ и $kx_0 + \phi = n_2\pi$, за произвољне целе бројеве n_1 и n_2. Отуда $k = (n_2 - n_1)\pi/x_0$ и за решења (4.216) узимамо само

$$\psi_n(x) = b_n \sin\frac{n\pi x}{x_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

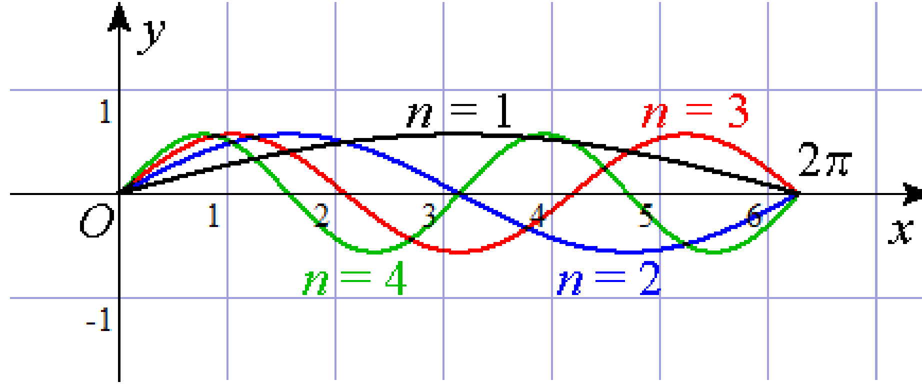
Нормализација ове функције даје:

$$1 = \int_0^{x_0} |\psi(x)|^2\,dx = b_n^2 \int_0^{x_0} \sin^2\frac{n\pi x}{x_0}\,dx = \frac{1}{2}b_n^2 x_0,$$

па је нормализована таласна функција

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{x_0}} \sin \frac{n\pi x}{x_0}. \qquad (4.217)$$

Нпр. за дужину кутије $x_0 = 2\pi$, имамо синусоиде $\psi_n(x) = \sqrt{1/\pi}\sin(nx/2)$ чији су случајеви $n = 1, 2, 3, 4$ приказани на слици 4.13.



Slika 4.13: Таласне функције ψ_n.

Енергија система $E = \hbar^2 k^2/2m$, због $k = n\pi/x_0$ постаје:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mx_0^2}, \qquad (4.218)$$

где је $h = 2\pi\hbar$ Планкова константа. Изван кутије, $x \notin [0, x_0]$, је $\psi(x) = 0$. Вероватноћа да је честица у n-том стању на интервалу $x \in [x_1, x_2]$ износи $\int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2\,dx$. □

Поопштење средње вредности (4.111) оператора $\tilde{A}$ су коефицијенти

$$A_{jk} = \int \psi_j^* \tilde{A} \psi_k \, dx, \qquad (4.219)$$

где се у случају таласних функција из примера за индексе могу узимати природни бројеви. Ови коефицијенти чине матрицу $\hat{A} = (A_{jk})$ чији дијагонални елеменат A_{nn} је средња вредност датог оператора за сопствену вредност n. Када су сопствене вредности положаји то је матрица положаја.

Пример 4.15.3. *Наћи коефицијенте матрице положаја ($0 \le x \le x_0$) нивоа $n \in \mathbb{N}$ за честицу из последњег примера.*

Решење. Матрични елементи позиције x биће:

$$x_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^*(x) x \psi_k(x)\,dx = \int_0^{x_0} x\psi_j\psi_k\,dx, \quad j, k = 1, 2, 3, \dots, \qquad (4.220)$$

а отуда уврштавањем (4.217) добијамо:

$$x_{jk} = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} x \sin\frac{j\pi x}{x_0} \sin\frac{k\pi x}{x_0}\,dx$$

$$= \frac{2}{x_0} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{x_0} x \left[\cos\frac{(j-k)\pi x}{x_0} - \cos\frac{(j+k)\pi x}{x_0} \right] dx$$

$$= \frac{x_0}{\pi^2} \left[\frac{1-\cos\pi(j+k)}{(j+k)^2} - \frac{1-\cos\pi(j-k)}{(j-k)^2} \right],$$

коначно добијамо

$$x_{jk} = \frac{4x_0}{\pi^2} \frac{[(-1)^{j-k}-1]jk}{(j^2-k^2)^2}, \quad j-k \ne 0. \tag{4.221}$$

Недијагонални елементи ($j-k \ne 0$) који су нуле ($x_{jk} = 0$) не могу представљати преласке из једног стања енергије у друго ($E_j \to E_k$). Приметимо да су све функције ψ_n или парне или непарне[75] у односу на средину кутије $x = x_0/2$. Вредностима $n = 1,3,5,\dots$ одговарају парне, вредностима $n = 2,4,6,\dots$ непарне ψ_n. Зато су елементи матрице нуле само када је $j-k \ne 0$ паран број.

Међутим, нити дијагонални елементи ($j-k = 0$) нису нуле. Израчунавамо их као лимес $(j-k) \to 0$, стављајући $1-\cos\varphi \approx \frac{1}{2}\varphi^2$ и даље. Добијамо

$$x_{nn} = \frac{x_0}{2}, \quad n = 1,2,3,\dots \tag{4.222}$$

То је предвидљив резултат, јер је x_{nn} просечна вредност апсцисе x у n-том стању, а она износи управо $\frac{1}{2}x_0$. □

Потсетимо се да у претходном, у примеру 4.15.2, имамо потенцијал нула унутар кутије, а бесконачан изван. Тај модел (рецимо за молекуле гаса у боци) има веома добро слагање са експериментима. Једнако су добре потврде Шредингерових предвиђања и за други случај, када честица у кутији и даље има нулти потенцијал, али вањски потенцијал није бесконачан, па она може побећи.

Пример 4.15.4. *Решити Шредингерову једначину са нултим потенцијалом у кутији* $0 < x < x_0$ *и коначним изван.*

Решење. Према датим условима, потенцијал је:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, x_0), \\ U, & x \notin (0, x_0). \end{cases}$$

Формирамо три таласне једначине за три интервала:

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E-U)\psi = 0, & x \le 0, \\ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + E\psi = 0, & 0 < x < x_0, \\ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E-U)\psi = 0, & x \ge x_0, \end{cases}$$

где је E енергија честице, $\psi = \psi(x)$ таласна функција. Решења ових једначина зависиће од тога да ли је енергија честице већа, или мања од потенцијала.

Када је $E < U$, тада су следећи бројеви реални:

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}.$$

[75] Ако за свако x важи $f(-x) = f(x)$ функција је парна, а $f(-x) = -f(x)$ она је непарна

Користећи их пишемо:

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0, & x \le 0, \\ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, & 0 < x < x_0, \\ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0. & x \ge x_0. \end{cases}$$

Опште решење прве и треће од тих једначина је облика $\psi(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$. Због граничних услова: за прву, $x \to -\infty$, $\psi(x) \to 0$, мора бити $B = 0$; за другу, $x \to \infty$, $\psi(x) \to 0$, мора бити $A = 0$. Средња једначина има облик $\psi(x) = a\cos kx + b\sin kx$. Заједно добијамо решење облика:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\alpha x}, & x \le 0, \\ a\cos kx + b\sin kx, & 0 < x < x_0, \\ Be^{-\alpha x}, & x \ge x_0, \end{cases}$$

Да ова функција не би имала прекид у тачки $x = 0$, мора бити $A = a$. Да не би било прекида за $x = x_0$, мора бити $B = e^{\alpha x_0}(a\cos kx_0 + b\sin kx_0)$. Поред тога, тражимо да је нагиб (први извод) те функције непрекидан и добијамо

$$\operatorname{tg}(kx_0) = \frac{2\alpha k}{k^2 - \alpha^2}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{4.223}$$

Констатујмо само, прва једначина по k има највише коначно много решења, што ће ограничити број дозвољених вредности енергије у другој на коначан број. Такође добијамо:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\alpha x}, & x \le 0, \\ A(\cos kx + \frac{\alpha}{k}\sin kx), & 0 < x < x_0, \\ Ae^{-\alpha(x-x_0)}, & x \ge x_0. \end{cases} \tag{4.224}$$

Константу A одређујемо из услова нормирања $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1$. Добијамо:

$$A = \frac{k}{k_0}\sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha x_0 + 2}}, \quad k_0 = \frac{\sqrt{2mU}}{\hbar}.$$

Вероватноћа налажења дате честице изван кутије је $\Pr(x \notin [0, x_0]) = |A|^2/\alpha$. □

У настави квантне механике има много оваквих једноставнијих или сложенијих примера, али то више није тема ове књиге. Наглашено је да они имају веома добро слагање са експериментима. Треба знати и да многе друге проблеме још увек не умемо решити, да је квантна механика добацила тек до решења за водоников и њиму сличан атом[76], да квантну физику тек чекају чуда овог света.

Таласне једначине квантне механике су такође и Диракова и Клајн-Гордонова, које се могу извести из претпоставке о очувању информације, што ме до недавно држало у убеђењу[77] да је таква и Шредингерова. Међутим, Шредингерова једначина је у том смислу општија од Диракове (в. пример 1.9.2), јер се Лоренцове трансформације (укључујући и геодезике опште теорије релативности) односе само на инерцијална кретања, која чувају информацију. Када честица осећа дејство силе, она тада комуницира са додатним димензијама времена при чему своју информацију може повратити у стање неизвесности. Тада не важи закон одржања саме информације, већ информације плус неизвесности. Али и о томе је већ писано у овој књизи.

[76] Р. Вуковић: Електромагнетизам III - водонику сличај атом, www.academia.edu/29095272/

[77] R. Vukovic: Conservation law of information for particles, www.academia.edu/8004844/

Закључак

На крају стижемо на почетак. На крају процене нових теза, на почетак актуелне физике. Новост је идеја да је свака честица делимично у виртуелном стању, када није реална и није непостојећа. Она је у том стању увек након последње интеракције у којем не комуницира са реалним светом, већ је спрегнута са својом прошлошћу. Честица са својом последњом реализацијом добија хронолошки смисао, док је њено присуство у наредном току само виртуелно. Време тако настаје, реализацијама тих честица и гомилањем информација које се након сваке реалне интеракције не дају више оспорити. То је неопходан закључак када напустимо данас уобичајено веровање у физици да заправо и нема објективне случајности, већ да неко или нешто детерминистички управља овим светом на начин који је нама недоступан. Као што се може видети у књизи, нова и стара теза се могу довести (скоро) на исто, што сматрам потврдом нове.

Ново је и тумачење комплексне информације као (негативног) логаритма таласне функције, као веома поопштене основне информације, каквом сматрам Хартлијеву. Новости су да је та изведена информација бар формално еквивалентна дејству из физике, а са друге стране да је њен специјални случај Шенонова информација из математике.

Необичнан је начин поопштавања другог закона термодинамике на сву материју, тако да је принуђен да буде последица принципа вероватноће. Тело које мирује или се креће инерцијално, чини то зато што су му сви други релативни системи мање вероватни, односно са мањом ентропијом, у која оно не иде спонтано. Одбачено је веровање да су ентропије свих релативних система једнаке и да су како закон инерције тако и принцип ненасилног одржања или повећања ентропије (када је то могуће) последице нечег трећег, независног од принципа вероватноће.

По први пут се у физици појављује, мислим, и понуђено схватање топлоте и температуре - за сада само као хипотеза. Релативно кретање повећаће кинетичку енергију молекула али не и њихове степене слободе који би довели до пораста топлоте тела. Оно ће повећати температуру тела. Да у томе нема контрадикције видимо када свако „Доплеров ефекат“ у физици заменимо са „већа температура“, а садашњу „енталпију“ одвојимо од „топлота“. Старо веровање је управо обрнуто, топлота кретањем расте, а температура је константна.

Знам да су ових неколико разлика за сада већ и превише, али верујем да би оне у догледно време могле бити тек почетак.

Растко Вуковић,
Бања Лука,
15. јануар 2017.

Bibliografija

[1] Растко Вуковић: *ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ* - слобода, демократија и физика[78]; Економски институт Бања Лука, јули 2016.

[2] Hai-Long Zhao: *Lorentz-Covariant Theory of Gravity* Founded on Inertial Frame of Center of Mass, arXiv:gr-qc/0512088, 15 Dec 2005.

[3] Bernhard Rothenstein and Stefan Popescu: *Lorentz transformations* - Einstein's derivation simplified; Politehnica University of Timisoara, Romania; Siemens AG, Erlangen, Germany[79].

[4] Л. Ландау и Е. Лифшиц: *ТЕОРИЈА ПОЉА*, Научна Књига, Издавачко предузеће народне републике Србије, Београд, 1952.

[5] Von K. Schwarzschild: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Vorgelegt am 13. Januar 1916 [s. oben S. 42] [80]

[6] Marko Vojinović: *SCHWARZSCHILD SOLUTION IN GENERAL RELATIVITY*, March 2010.

[7] Tatomir P. Anđelić: *TENZORSKI RAČUN*, peto izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1987.

[8] Dr Đorđe Mušicki: *UVOD U TEORIJSKU FIZIKU I*, teorijska mehanika, ICS, Beograd, 1975.

[9] Robert M. Wald: *GENERAL RELATIVITY*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984

[10] Lee C. Loveridge: *Physical and Geometric Interpretations* of the Riemann Tensor, Ricci Tensor, and Scalar Curvature; arXiv:gr-qc/0401099v1, 23 Jan 2004

[11] Huseyin Demir: *Incircles Within*, Mathematics Magazine, Vol. 59, No. 2 (Apr., 1986), pp. pp. 77-83 (7 pages)

[12] S. Aljančić: *UVOD U REALNU I FUNKCIONALNU ANALIZU*, Treće izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.

[13] S. Kurepa: *KONAČNO DIMENZIONALNI VEKTORSKI PROSTORI I PRIMJENE*, Drugo izdanje, Liber, Zagreb, 1976.

[78] Информација перцепције: `https://archive.org/details/Informacija`

[79] Lorentz transformations: `https://arxiv.org/ftp/physics/papers/0702/0702157.pdf`

[80] Gravitationsfeld: `https://de.wikisource.org/wiki/%C3%9Cber_das_Gravitationsfeld_eines_Massenpunktes_nach_der_Einsteinschen_Theorie`

[14] Momir V. Ćelić, Biljana Sukara-Ćelić: *LINEARNA ALGEBRA*, Глас Српски, Графика, Бања Лука, 2010.

[15] Dr inž. Dragiša M. Ivanović: *KVANTNA MEHANIKA*, Naučna knjiga, Beograd, 1974.

[16] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Physical Review[81] 47, 777 – Published 15 May 1935

[17] John Bell: *On the Einstein–Poldolsky–Rosen paradox*, Physics[82] 1 3, 195-200, Nov. 1964

[18] Lee Rozema, Ardavan Darabi, Dylan Mahler, Alex Hayat, Yasaman Soudagar, Aephraim Steinberg: *Violation of Heisenberg's Measurement-Disturbance Relationship by Weak Measurements*, Physical Review Letters[83], 2012; 109 (10) DOI:

[19] V. A. Fock: *FUNDAMENTALS OF QUANTUM MECHANICS*, Translated for the Russian in 1932, Mir Publishers, Moscow, 1978.

[81] Einstein: `http://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.47.777`
[82] Bell: `http://www.drchinese.com/David/Bell_Compact.pdf`
[83] Violation: `http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.109.100404`

Indeks